Mathe mit dem Känguru für zu Hause

30.April

Klasse 3 und 4

$\boxed{\mathbf{1}}$ In diesen Additionsaufgaben sind zwar alle Ziffern korrekt, jedoch zum Teil an der falschen Stelle. Ihr müsst also die vorhandenen Ziffern vertauschen, sodass eine richtige Aufgabe entsteht. Wer findet die Lösungen?

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 0 \\ + & 1 & 8 \\ \hline 2 & 8 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 3 & 2 \\ + & 1 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 0 \end{array}$$

Lösung: Die Lösungen sind bis auf Vertauschung der Einerziffern oder Zehnerziffern der Summanden eindeutig.

$$\begin{array}{ccc} & 8 & 8 \\ + & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 7 & 9 \\ + & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 3 \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Auch in diesen Multiplikationsaufgaben sind die Ziffern durcheinander geraten. Könnt ihr die Ordnung wiederherstellen?

(a) $28 \cdot 1 = 44$ (b) $43 \cdot 2 = 14$ (c) $76 \cdot 8 = 41$

Lösung: Bei a) gibt es zwei Lösungen, bei den anderen jeweils eine.

(a) $21 \cdot 4 = 84$ $12 \cdot 4 = 48$ (b) $14 \cdot 3 = 42$ (c) $17 \cdot 4 = 68$

Klasse 5 und 6

1 Durch welche Ziffern müssen die Sternchen ersetzt werden, damit richtige Multiplikationsaufgaben entstehen?

$$\begin{array}{r} * \; 6 \; * \cdot 7 \\ \hline * \; 1 \; * \; 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * \; 7 \cdot * \\ \hline 4 \; * \; 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \; * \cdot * \\ \hline 3 \; * \; 4 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{r} 1\;6\;9 \cdot 7 \\ \hline 1\;1\;8\;3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\;7 \cdot 9 \\ \hline 4\;2\;3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\;4 \cdot 6 \\ \hline 3\;8\;4 \end{array}$$

2 In den folgenden Aufgaben sind die Sternchen jeweils so durch die darüber stehenden Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgaben entstehen. Wer findet alle Lösungen?

1 bis 4

$$\begin{array}{r} * \cdot * \\ \hline * \; * \end{array}$$

1 bis 5

$$\begin{array}{r} * \; * \cdot * \\ \hline * \; * \end{array}$$

1 bis 6

$$\begin{array}{r} * \; * \cdot * \\ \hline * \; * \; * \end{array}$$

Lösung:

1 bis 4

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 4 \\ \hline 1\;2 \end{array}$$

1 bis 5

$$\begin{array}{r} 1\;3 \cdot 4 \\ \hline 5\;2 \end{array}$$

1 bis 6

$$\begin{array}{r} 5\;4 \cdot 3 \\ \hline 1\;6\;2 \end{array}$$

Klasse 7 und 8

1 Von den folgenden 6 Rechenaufgaben sind einige richtig, einige falsch. Es ist jedoch möglich, aus jeder dieser Rechenaufgabe eine richtige Aufgabe zu machen, indem in jeder Aufgabe jede einzelne Ziffer um 1 verändert wird - entweder wird sie um 1 größer oder um 1 kleiner. Welche richtigen Rechnungen könnt ihr so erhalten?

a) $16 \cdot 4 = 64$

b) $34 \cdot 6 = 204$

c) $252 \cdot 6 = 1512$

d) $678 \cdot 5 = 1245$

e) $1663 \cdot 3 = 21379$

f) $2683 \cdot 3 = 26179$

Lösung: Beim Lösen der Aufgabe hilft es für die vorderen Ziffern, Abschätzungen vorzunehmen und für die hinteren Ziffern diese getrennt vom Rest zu betrachten.

a) $25 \cdot 3 = 75$

b) $23 \cdot 5 = 115$ oder $45 \cdot 7 = 315$

c) $343 \cdot 7 = 2401$

d) $589 \cdot 4 = 2356$

e) $2572 \cdot 4 = 10288$

f) $3772 \cdot 4 = 15088$

2

a) In der Rechnung $12 \cdot 3 = 45$ muss nur eine einzige Ziffer durch eine andere Ziffer ersetzt werden, um sie zu berichtigen. Welche?

b) Wie viele Ziffern müssen in der Rechnung $123 \cdot 4 = 567$ mindestens berichtigt werden?

Lösung:

a) Wir ersetzen die 2 durch eine 5 und erhalten die richtige Gleichung $15 \cdot 3 = 45$.

b) Zwei Ziffern zu ersetzen reicht nicht aus. Eine mögliche Lösung mit 3 vertauschten Ziffern ist $128 \cdot 4 = 532$.

Klasse 9 bis 13

1 Welche Zahlen lassen sich für a und b einsetzen, damit eine korrekte Additionsaufgabe entsteht?

$$\begin{array}{cccc} & & & \mathrm{a} \\ + & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} \\ + & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} \\ + & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} \\ + & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} \end{array}$$

Lösung: Die Zahl bbb ist gleich $111 \cdot b$, und $abbb$ ist gleich $1000 \cdot a + 111 \cdot b$. Damit lässt sich die Gleichung umschreiben und vereinfachen:

$$a + 4 \cdot 111 \cdot b = 1000 \cdot a + 111 \cdot b$$
$$\Leftrightarrow 333 \cdot b = 999 \cdot a$$
$$\Leftrightarrow b = 3 \cdot a$$

Da a und b Ziffern sein müssen, ergeben sich drei Lösungen:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ + & 3 & 3 & 3 \\ + & 3 & 3 & 3 \\ + & 3 & 3 & 3 \\ + & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & & 2 \\ + & 6 & 6 & 6 \\ + & 6 & 6 & 6 \\ + & 6 & 6 & 6 \\ + & 6 & 6 & 6 \\ \hline 2 & 6 & 6 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & & 3 \\ + & 9 & 9 & 9 \\ + & 9 & 9 & 9 \\ + & 9 & 9 & 9 \\ + & 9 & 9 & 9 \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

2 Es mag dir noch nicht aufgefallen sein, aber $\sqrt{2 + \frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. Gibt es mehr solche Gleichungen?

Finde alle Lösungen der Gleichung $\sqrt{n + \frac{p}{q}} = n \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}$, wobei n, p und q natürliche Zahlen sind.

Lösung: Wir quadrieren beide Seiten der Gleichungen, multiplizieren mit q und vereinfachen:

$$\sqrt{n + \frac{p}{q}} = n \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}$$
$$\Rightarrow n + \frac{p}{q} = n^2 \cdot \frac{p}{q}$$
$$\Rightarrow nq + p = n^2 p$$
$$\Rightarrow nq = (n^2 - 1)p$$

Wir nehmen an $\frac{p}{q}$ ist vollständig gekürzt. Dann sind p und q teilerfremd und n und $n^2 - 1$ ebenso. Dann muss $q = n^2 - 1$ und $p = n$ sein.
Indem wir in die Ausgangsgleichung einsetzen, überprüfen wir, ob tatsächlich alle Zahlen, für die diese Beziehung gilt, Lösungen sind:

$$\sqrt{n + \frac{p}{q}} = \sqrt{n + \frac{n}{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{n \cdot (n^2 - 1) + n}{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{n^3 - n + n}{n^2 - 1}}$$
$$= \sqrt{\frac{n^3}{n^2 - 1}} = \sqrt{n^2 \cdot \frac{n}{n^2 - 1}} = n \cdot \sqrt{\frac{n}{n^2 - 1}} = n \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}$$

Für jede natürliche Zahl n größer als 1 gibt es also eine Lösung, wenn wir $p = n$ und $q = n^2 - 1$ setzen. Wählen wir zum Beispiel $n = 3$, so erhalten wir $\sqrt{3 + \frac{3}{8}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$.