Mathe mit dem Känguru für zu Hause

29. April

Klassenstufen 3 und 4

1 Karl entwirft Buchstabenschlangen. In ein 4×2-Karopapier wollte er MATHEASS so schreiben, dass aufeinanderfolgende Buchstaben des Wortes in benachbarten Karos stehen, also solchen, die zumindest eine gemeinsame Ecke haben. Welche der 4×2-Tafeln ist *nicht* nach dieser Regel gefüllt?

(**A**)

A	H	E	A
T	M	S	S

(**B**)

S	M	A	T
S	A	E	H

(**C**)

M	T	S	A
S	A	H	E

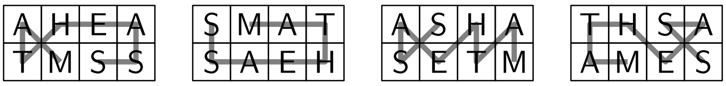
(**D**)

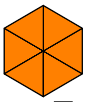
A	S	H	A
S	E	T	M

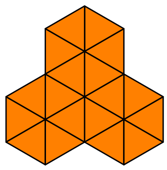
(**E**)

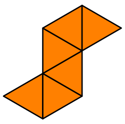
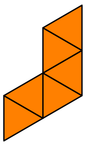
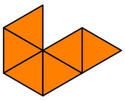
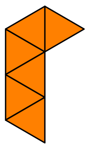
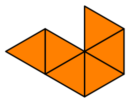
T	H	S	A
A	M	E	S

Lösung: Bei Tafel (**C**) hat Karl sich geirrt. Damit die Buchstabenschlange auf das doppelte S endet, müssen die beiden S in benachbarten Karos stehen. Die anderen Buchstabenschlangen können nach Karls Regel geschrieben werden, wie wir hier zeigen:

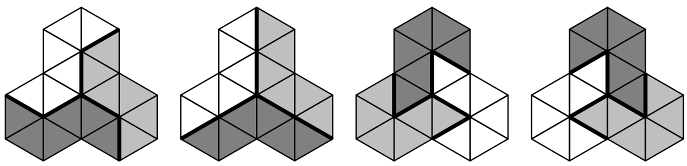


2 Tom hat 3 gleiche Teile  zu einem hübschen Legebild zusammengeschoben. Lilli möchte dasselbe Bild wie Tom legen – ebenfalls aus 3 gleichen Teilen. Mit 4 der 5 abgebildeten Sorten ist das möglich. Mit welcher Sorte nicht?

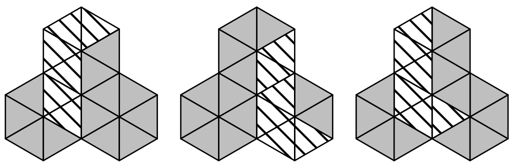


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir zeichnen mit dicken Linien ein, wie die Teile zusammengelegt sein können und heben die Teile hervor. Wir sehen, dass sich aus jeweils 3 Teilen der Sorten (**A**), (**B**), (**C**) und (**E**) das Legebild zusammenschieben lässt. Im Fall (**D**), bei dem von den 6 kleinen Dreiecken 5 in einer Reihe hintereinander angeordnet sind, finden wir keine Möglichkeit, das Legebild zu puzzeln. Egal, wie wir die lange 5-er-Reihe platzieren, sie teilt stets den Rest in zwei ungleiche Teile. In der unteren Abbildung haben wir das für die senkrechte Lage dargestellt.



(**A**) (**B**) (**C**) (**E**)



Klassenstufen 5 und 6

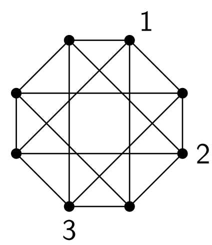
1 Ihre Augen leuchteten, als die Piraten Sparrow, Barbossa und Turner die Schatzkiste öffneten und den Berg Goldmünzen sahen. Nach alter Piratentradition nahm sich zuerst Sparrow eine Münze, dann Barbossa zwei, Turner drei, dann Sparrow vier, Barbossa fünf usw. So wurden die Goldmünzen *ohne Rest* aufgeteilt. Zum Schluss hatte Barbossa 10 Münzen mehr als Turner, und Sparrow bekam

(**A**) 12 Münzen. (**B**) 16 Münzen. (**C**) 27 Münzen.
(**D**) 35 Münzen. (**E**) 51 Münzen.

Lösung:
Da es sich um nicht allzu große Zahlen handelt und das Rechnen schnell geht, ist ein vernünftiger Lösungsweg, das Wachsen des Münzhaufens Schritt für Schritt zu protokollieren: Nachdem wir für Barbossa die 40 Münzen ausgerechnet haben, sehen wir, dass Barbarossa nun genau 10 Münzen mehr als Turner hat. Da die Differenz zwischen seinem und dem Anteil Turners ständig weiter wächst, gibt es keinen weiteren Punkt, an dem er genau 10 Münzen mehr als Turner hat. Sparrow bekam also 35 Münzen.

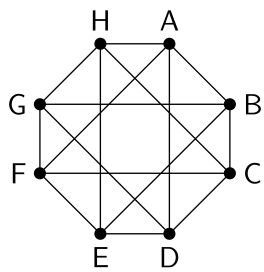
Sparrow	Barbossa	Turner
1	2	3
5	7	9
12	15	18
22	26	30
35	40	

2 Die acht Eckpunkte der abgebildeten Figur sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3 oder 4 beschriftet werden, dass die Zahlen an den Endpunkten einer gezeichneten Strecke jeweils verschieden sind. Wie oft erscheint die Zahl 4 dann in der Figur?



(**A**) 1-mal (**B**) 2-mal (**C**) 3-mal (**D**) 4-mal (**E**) 5-mal

Lösung: Bezeichnen wir die Punkte der Reihe nach, beginnend dort, wo in der Aufgabe die 1 stand, im Uhrzeigersinn mit A, B, C, D, E, F, G und H, so muss bei den Punkten B, D, F und H jeweils 4 geschrieben werden, da diese Punkte mit den drei Punkten A, C und E verbunden sind, und somit weder 1, 2 noch 3 stehen kann. Bei G kann aber nicht 4 stehen, da G mit allen Punkten mit 4 verbunden ist. Die Zahl 4 erscheint also viermal in der Figur.



Klassenstufen 7 und 8

$\boxed{1}$ „In meiner Mathe-AG sind alle Teilnehmer mindestens 17 Jahre alt", verkündet die AG-Leiterin. Da irrt sie sich aber. Folglich gilt gewiss, dass

(**A**) alle genau 17 Jahre alt sind. (**B**) alle älter als 17 Jahre sind.
(**C**) keiner bereits 17 Jahre alt ist. (**D**) es einen gibt, der 18 Jahre alt ist.
(**E**) es einen gibt, der jünger als 17 Jahre ist.

Lösung: Die Verneinung der Aussage „Alle sind mindestens 17 Jahre alt." lautet: *Es gibt einen*, für den das Kriterium, mindestens 17 Jahre alt zu sein, *nicht zutrifft*, also einen, der jünger ist.

$\boxed{2}$ In dem Bruch $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot A \cdot R}{M \cdot A \cdot I}$ sollen die Buchstaben in den Produkten in Zähler und Nenner durch die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 9$ ersetzt werden; gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen. Welchen *kleinsten ganzzahligen* Wert kann der Bruch haben?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 7

Lösung: Zuerst kürzen wir das A und erhalten $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot R}{M \cdot I}$. Da der Wert des Bruchs möglichst klein werden soll, versuchen wir den Nenner so groß wie möglich zu machen, d. h., wir ersetzen M und I durch 8 und 9: $\dfrac{F \cdot E \cdot B \cdot R \cdot U \cdot R}{8 \cdot 9}$. Nun müssen wir im Zähler für die Buchstaben möglichst kleine Zahlen finden, sodass sich die 8 und die 9 im Nenner kürzen lassen. Weil 8 und 9 nur durch 2 und 3 teilbar sind, betrachten wir neben der 1 nur solche einstellige Zahlen, die ebenfalls nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten: 2, 3, 4 und 6. Der Zähler wird am kleinsten, wenn das doppelt auftretende R gleich 1 ist. Dann ist der Bruch gleich $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1}{8 \cdot 9} = 2$.
Wenn wir die Buchstaben durch die Zahlen $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ ersetzen, ist kein kleinerer Wert möglich, wie wir gesehen haben. Würden wir statt einer dieser Ziffern die 5 verwenden, dann kann diese nur im Zähler stehen, da sonst keine ganze Zahl entsteht. Der Wert des Bruchs wäre dann aber mindestens 5. Für 7 gilt das analog.

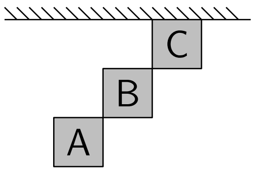
Klassenstufen 9 bis 13

$\boxed{1}$ Bei einer Umfrage unter den Teilnehmern an der Regionalrunde der Mathematik-Olympiade stellt sich heraus: Genau 6 der 48 Teilnehmer haben nur ein Geschwisterkind, das auch bei der Regionalrunde mitmacht, 9 der Teilnehmer sind mit 2 Geschwistern dabei und 4 mit sogar 3 Geschwistern. Die restlichen Teilnehmer haben keine Geschwister, die an der Regionalrunde teilnehmen. Aus wie vielen verschiedenen Familien sind die Teilnehmer bei dieser Regionalrunde?

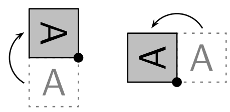
(**A**) 19 (**B**) 25 (**C**) 31 (**D**) 36 (**E**) 48

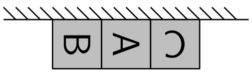
Lösung: Die 6 Kinder, die mit nur einem Geschwisterkind bei der Regionalrunde dabei sind, stammen aus 3 Familien; die 9 Kinder, die mit zwei Geschwisterkindern dabei sind, stammen aus 3 Familien; und die 4 Kinder, die mit drei Geschwisterkindern dabei sind, müssen alle Geschwister sein, stammen also aus derselben Familie. Von den 48 Teilnehmern sind es $6 + 9 + 4 = 19$ Teilnehmer, die nicht allein aus ihren Familien kommen, die restlichen $48 - 19 = 29$ sind die einzigen aus ihren Familien. Folglich sind Teilnehmer aus $29 + 3 + 3 + 1 = 36$ Familien bei der Regionalrunde dabei.

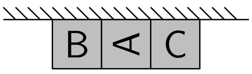
$\boxed{2}$ Drei große Kisten wurden geliefert und abgestellt (s. Bild rechts oben). Sie sollen ordentlich an die Wand gestellt werden. Da sie sehr schwer sind, können sie nur um einen der Eckpunkte um 90° gedreht, nicht aber getragen oder gekippt werden (s. Bild rechts unten). Wie könnten sie nachher an der Wand stehen?

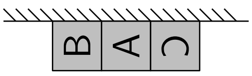


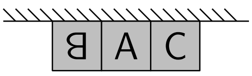
so: oder so:



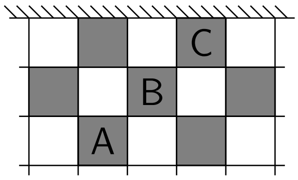
(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) Alle 4 Anordnungen sind möglich.



Lösung: Wir stellen uns vor, dass die Kisten auf einem Quadratraster stehen. Die Quadrate färben wir wie im Bild schachbrettartig abwechselnd schwarz und weiß. Beim Bewegen der Kisten ist die Buchstabenrichtung auf Quadraten gleicher Farbe stets gleich und auf Quadraten verschiedener Farbe stets verschieden: Auf schwarzen Feldern stehen die Buchstaben immer aufrecht oder über Kopf, und auf weißen Feldern liegen die Buchstaben stets auf der Seite. In der Endposition befinden sich die Kisten B und C wie zu Beginn auf Quadraten gleicher Farbe, die Kiste A hingegen auf einem Quadrat der anderen Farbe. Die Buchstabenrichtung der Kisten B und C muss also gleich sein, die von Kiste A muss davon verschieden sein. Das ist nur bei Position (**B**) der Fall, die anderen Positionen sind nicht möglich. Hier ist eine (von vielen) Möglichkeiten, wie die Kisten in die Position (**B**) bewegt werden können: