Mathe mit dem Känguru für zu Hause

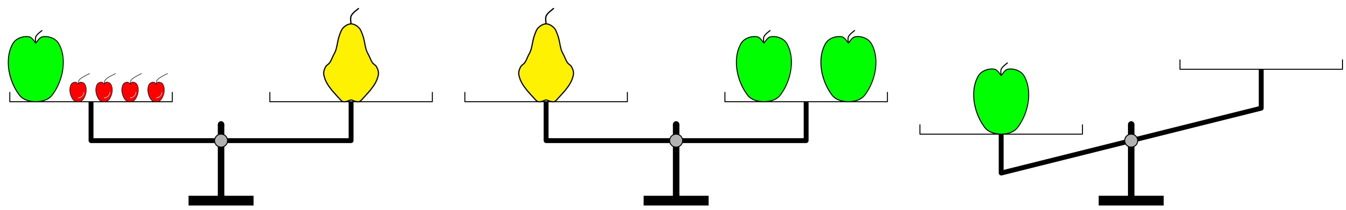
28. April

Klassenstufen 3/4

$\boxed{1}$ Susi kann schneller laufen als Johann, und Benny kann schneller laufen als Hanni. Außerdem kann Johann schneller laufen als Karl, und Hanni kann schneller laufen als Susi. Wer kann schneller laufen: Susi oder Karl? Kannst du sagen, in welcher Reihenfolge die 5 Kinder bei einem Wettlauf ins Ziel kommen würden?

Lösung: Susi kann schneller laufen als Johann, und Johann kann schneller laufen als Karl, also kann Susi auch schneller laufen als Karl.
Die Reihenfolge in einem Rennen wäre von schnell nach langsam: Benny, Hanni, Susi, Johann, Karl.

$\boxed{2}$ Die ersten beiden Wagen befinden sich im Gleichgewicht. Auf der 3. Waage befindet sich links ein Apfel. Wie viele Kirschen muss ich auf die rechte Waagschale legen, um die 3. Waage ins Gleichgewicht zu bringen?



Lösung: Da die erste Waage im Gleichgewicht ist, wiegen 1 Apfel und 4 Kirschen genau so viel wie 1 Birne. Da auch die zweite Waage im Gleichgewicht ist, wiegt 1 Birne genau so viel wie 2 Äpfel.
Also wiegen 1 Apfel und 4 Kirschen genau so viel wie 2 Äpfel. Nehmen wir in Gedanken auf beiden Seiten einen Apfel weg, so erhalten wir , dass 4 Kirschen genau so viel wie 1 Apfel wiegen. Wir müssen demzufolge 4 Kirschen auf die rechte Seite legen.

Klassenstufen 5/6

1 Auf einer Balkenwaage lässt sich für zwei verschieden schwere Gegenstände einfach herausfinden, welcher der leichtere ist. Wie oft muss auf einer Balkenwaage ohne Gewichte gewogen werden, um

a) drei

b) vier

c) fünf

paarweise verschieden schwere Gegenstände nach ihrem Gewicht zu ordnen?

Lösung:

a) Bei jeder Wägung lassen sich 2 Gegenstände miteinander vergleichen. Es gibt 3 mögliche Paare, die untersucht werden können. Nehmen wir einmal an, dass wir bei der 1. Wägung herausfinden, dass Gegenstand A schwerer als B ist. Bei der 2. Wägung wählen wir natürlich Gegenstand C und vergleichen mit A oder B. In beiden Fällen kann es sein, dass wir danach immer noch nicht die komplette Reihenfolge wissen, und zwar, wenn C leichter als A oder wenn C schwerer als B ist. Dann brauchen wir noch eine 3. Wägung.

b) Die 4 Gegenstände können wir zunächst in 2 Paare aufteilen und diese untereinander vergleichen (2 Wägungen).

Wenn wir dann die beiden schwereren miteinander vergleichen, wissen wir, welcher der 4 Gegenstände am schwersten ist, und wenn wir die beiden leichteren Gegenstände miteinander vergleichen, welcher am leichtesten ist (2 weitere Wägungen).

Sind die beiden übrigen Gegenstände zwei, die wir schon zu Beginn miteinander verglichen haben, so sind wir fertig. Andernfalls genügt 1 weitere Wägung (insgesamt sind es dann 5), um die komplette Reihenfolge zu kennen.

c) Wie in b) vergleichen wir zunächst 2 Paare untereinander (A und B, C und D) und ermitteln dann in einer 3. Wägung den schwersten der 4 Gegenstände A, B, C, D.

Nehmen wir mal an, dass wir bei den Wägungen erhalten haben, dass A schwerer als B ist ($A > B$), C schwer als D ($C > D$) und A schwerer als C ($A > C$). Dann wissen wir, dass $A > C > D$ gilt (3 Wägungen).

In diese Reihe ordnen wir nun den Gegenstand E ein, indem wir diesen zuerst mit C vergleichen und dann, je nachdem, ob E schwerer oder leichter als C ist, mit A bzw. D (2 Wägungen).

Da wir bereits wissen dass B leichter als A ist, müssen wir B in eine Reihe aus höchstens 3 Gegenständen einordnen (2 Wägungen, wie für E).

Insgesamt benötigen wir höchstens 7 Wägungen.

2 Eine Palindromzahl ist eine ganze Zahl, die sich von vorn und von hinten gleich liest, zum Beispiel 28582. Wie viele Palindromzahlen gibt es zwischen 10 und 1000?

Lösung: Wir untersuchen zunächst die zweistelligen Zahlen, also die Zahlen von 10 bis 99. Hier sind die Zahlen 11, 22, ..., 99 Palindromzahlen, davon gibt es 9 Zahlen.
Bei den dreistelligen Zahlen muss die ersten Ziffer mit der letzten Ziffer übereinstimmen. Die zweite Ziffer ist beliebig. Für die erste Ziffer können wir die Ziffer 1 bis 9 einsetzen, das sind 9 Möglichkeiten. Für die zweite Ziffer gehen alle Ziffern von 0 bis 9, es gibt also 10 Möglichkeiten. Insgesamt ergeben sich $9 \cdot 10 = 90$ mögliche dreistellige Palindromzahlen.
Zwischen 10 und 1000 gibt es folglich $90 + 9 = 99$ Palindromzahlen.

Klassenstufen 7/8

1 In einer sehr alten Rätselsammlung befand sich folgende Aufgabe: In einer Apotheke sind oft sehr kleine Mengen eines Pülverchens oder einer Tinktur abzumessen. Ein Apotheker braucht häufig von solchen Inhaltsstoffen Mengen von 1 g, 2 g, 3 g, ..., 40 g. Er hat eine Balkenwaage. Er überlegt,

a) wie viele verschiedene Gewichtsstücke er mindestens braucht, um jede Grammzahl von 1 bis 40 abwiegen zu können, wenn er Gewichtsstücke auf die eine Schale legt und das zu wiegende Gut auf die andere Waagschale.

b) wie viele verschiedene Gewichtsstücke er mindestens braucht, um jede Grammzahl von 1 bis 40 abwiegen zu können, wenn er Gewichtsstücke auf beide Schalen der Waage legen darf.

Lösung:

a) Der Apotheker braucht lediglich alle Zweierpotenzen an Gewichtsstücken zu nehmen. Wie kommt er darauf? Er überlegt sich zunächst, dass er sicher 1 g und 2 g braucht, da diese nicht anders abzuwiegen sind. 3 g braucht er dann nicht, weil er $3\,\mathrm{g} = 2\,\mathrm{g} + 1\,\mathrm{g}$ bereits abwiegen kann. Das Gewichtstück von 4 g wird dann wieder benötigt. Hier die Fortführung bis 16 g:

$1 = 1$	$2 = 2$	$3 = 1 + 2$	$4 = 4$
$5 = 1 + 4$	$6 = 2 + 4$	$7 = 1 + 2 + 4$	$8 = 8$
$9 = 1 + 8$	$10 = 2 + 8$	$11 = 1 + 2 + 8$	$12 = 4 + 8$
$13 = 1 + 4 + 8$	$14 = 2 + 4 + 8$	$15 = 1 + 2 + 4 + 8$	$16 = 16$

Geht der Apotheker so weiter vor, bemerkt er, dass nur die Gewichtsstücke 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g und 32 g benötigt werden, also 6 Stück.

Hinter der Lösung steckt die Idee, dass jede natürliche Zahl als Summe von Zweierpotenzen darstellbar ist. Das nennt sich Binärdarstellung einer Zahl.

b) Nun können wir Gewichtsstücke auf beide Seiten legen. Das erweitert unsere Möglichkeiten. Wir können nun Gewichte nicht nur addieren, sondern auch subtrahieren.

Wir können zum Beispiel 2 g abwiegen, indem wir ein 3 g-Stück auf eine Seite legen und ein 1 g-Stück auf die andere Seite. In der Tabelle sind die ersten Beispiele vermerkt. Das Gewicht, welches der Apotheker abwiegen möchte, ergibt sich als Differenz von 1. und 2. Waage.

Gewicht	1. Waage	2. Waage
1	1	0
2	3	1
3	3	0
4	$3 + 1$	0
5	9	$3 + 1$
6	9	3
7	$9 + 1$	3
8	9	1
9	9	0

Auf diese Art und Weise reichen bereits Gewichtsstücke von 1 g, 3 g, 9 g und 27 g, um alle ganzzahligen Gewichte bis 40 g abzuwiegen.

Das sind die Dreierpotenzen. Jede natürliche Zahl lässt sich durch Addition und Subtraktion von Dreierpotenzen darstellen.

$\boxed{2}$ In einem alten Rätselbuch geht es um die Möglichkeiten, Drachen zu besiegen. Wir stellen hier die Aufgabe, einen Drachen mit 3 Köpfen und 3 Schwänzen zu besiegen. Der Sieg ist erreicht, wenn alle Köpfe und alle Schwänze abgeschlagen sind. Mit einem kräftigen Schwertstreich kann entweder ein Kopf oder ein Schwanz oder es können zwei Köpfe oder zwei Schwänze abgetrennt werden. Dabei hat ein kräftiger Schwertstreich folgende Wirkungen:

- Das Abschlagen eines Kopfes führt dazu, dass der Drache statt dieses Kopfes nun zwei Köpfe hat.
- Das Abschlagen eines Schwanzes führt dazu, dass der Drache statt dieses Schwanzes nun 2 Schwänze hat.
- Das Abschlagen von zwei Köpfen führt dazu, dass nichts Neues dazukommt.
- Das Abschlagen von zwei Schwänzen führt dazu, dass der Drache stattdessen einen neuen Kopf bekommt.

Wie viele Schwertstreiche sind erforderlich, um den Drachen zu besiegen?

Lösung: Wir schlagen zunächst alle Schwänze ab. Zunächst schlagen wir einen Schwanz ab, dann bleiben 4 Schwänze übrig. Nun können wir zweimal 2 Schwänze abschlagen und es sind keine Schwänze mehr übrig. Dafür sind jetzt 5 Köpfe vorhanden. Wir schlagen zunächst einen Kopf ab, dafür entstehen 2 neue Köpfe, also insgesamt 6 Köpfe. Nun müssen wir lediglich dreimal jeweils 2 Köpfe abschlagen und haben gewonnen. Insgesamt sind 7 Schwertstreiche nötig, um den Drachen zu besiegen.

Klassenstufen 9 bis 13

$\boxed{1}$ Aus einem Würfel wird eine Kugel größtmöglichen Volumens herausgeschnitten. Welches Volumen ist größer? Das der Kugel oder das des Abfalls?

Lösung: Der Würfel habe die Kantenlänge $2r$, dann passt eine Kugel mit Radius r in den Würfel hinein. Nun teilen wir das Kugelvolumen durch das Würfelvolumen und vereinfachen:

$$\frac{V_{Kugel}}{V_{Würfel}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\frac{4\pi}{3}r^3}{8r^3} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2}$$

Da π größer als 3 ist, ist das Ergebnis größer als $\frac{1}{2}$, das heißt die Kugel nimmt mehr als die Hälfte des Würfelvolumens ein. Es ist jedoch nur etwa 52% des Würfelvolumens, also ziemlich knapp.

$\boxed{2}$ Finde 6 Primzahlen kleiner als 100, die zusammen die Ziffern von 1 bis 9 genau ein Mal enthalten. Wer findet alle 3 Lösungen?

Lösung: Wir haben 9 Ziffern, also werden wir 3 zweistellige und 3 einstellige Primzahlen bekommen müssen. Zahlen mit 4, 6 oder 8 an der Einerstelle sind alle durch 2 teilbar, also keine Primzahlen. Da 4, 6 und 8 selbst keine Primzahlen sind, müssen sie die Zehnerstellen der zweistelligen Primzahlen sein.
9 ist keine Primzahl, sie muss also als Einerziffer einer der zweistelligen Zahlen vorkommen. 49 und 69 sind keine Primzahlen, also muss 89 eine unserer Primzahlen sein. 1 ist keine Primzahl, muss also ebenso Einerziffer einer der zweistelligen Zahlen sein. Dafür kommen 41 und 61 in Frage.
2 und 5 können nicht Einerstelle einer zweistelligen Primzahl sein, also müssen sie als einstellige Primzahl vorkommen.
Mit dieser Vorarbeit finden sich leicht die drei Lösungen:

- 2, 5, 89, 41, 3, 67
- 2, 5, 89, 61, 7, 43
- 2, 5, 89, 61, 3, 47