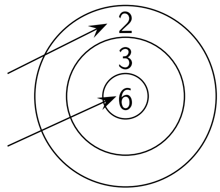
Mathe mit dem Känguru für zu Hause

27. April

1 Anke übt für den Wettkampf im Pfeilwerfen, bei dem die Punktzahlen von zwei Würfen zusammengezählt werden. Sie wirft zwei Pfeile und jubelt: insgesamt 8 Punkte (s. Bild). Wie viele verschiedene Gesamtergebnisse sind möglich? Beachte, dass ein Pfeil, der die Zielscheibe nicht trifft, 0 Punkte gibt.



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

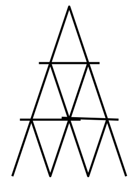
Lösung: Beim Werfen sind alle Kombinationen von geworfenen Punkten möglich, d. h. auf jede der vier Punktzahlen 6, 3, 2 und 0 kann jede dieser vier Punktzahlen folgen. Das sind $4 \cdot 4 = 16$ Varianten. Nun können wir 16 Summen bilden. Da es unter den 12 Paaren jedoch 6 gibt, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, wegen der Vertauschbarkeit der Summanden also dieselbe Summe erzeugen, können wir maximal $16-6 = 10$ verschiedene Summen erhalten. Nun bemerken wir schließlich noch, dass $6+0 = 3+3$ ist und finden Ankes gesuchte Anzahl möglicher Gesamtergebnisse mit 9. Wir schreiben es noch einmal ausführlich auf. Mit 2 Pfeilen lassen sich folgende Ergebnisse erzielen:

$$\begin{array}{rrr} 6+6=12 & 6+3=3+6=9 & 6+2=2+6=8 \\ 6+0=0+6=3+3=6 & 3+2=2+3=5 & 3+0=0+3=3 \\ 2+2=4 & 2+0=0+2=2 & 0+0=0 \end{array}$$

Das sind die neun verschiedenen Gesamtergebnisse: 12; 9; 8; 6; 5; 4; 3; 2 und 0.

2 Lisa baut ein Kartenhaus. Im Bild siehst du Häuser mit einer Schicht, mit zwei und mit drei Schichten. Wie viele Karten braucht sie, um ein Haus mit vier Schichten zu bauen?

(**A**) 23 (**B**) 24 (**C**) 25 (**D**) 26 (**E**) 27

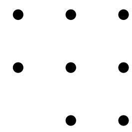


1 Schicht 2 Karten | 2 Schichten 7 Karten | 3 Schichten 15 Karten

Lösung: Am leichtesten finden wir die Lösung, wenn wir uns vorstellen, dass wir unter den 3-Schichten-Turm eine vierte Schicht bauen. Dazu brauchen wir zunächst 3 waagerecht liegende Karten, die unter den 3-Schichten-Turm gelegt werden. Anschließend stellen wir $4 \cdot 2 = 8$ Karten auf und heben den 3-Schichten-Turm darauf. Zu den für die 3 Schichten benötigten 15 Karten sind 11 hinzugekommen. Der Turm aus 4 Schichten besteht also aus insgesamt $15 + 11 = 26$ Karten.

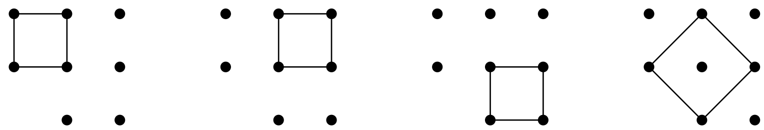
Klassenstufen 5 und 6

$\boxed{1}$ Wie viele Quadrate können gezeichnet werden, wenn die 4 Eckpunkte zu den 8 Punkten der nebenstehenden Abbildung gehören müssen?

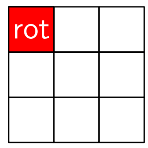


(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: In der Zeichnung ist die Lage der vier möglichen Quadrate zu sehen.

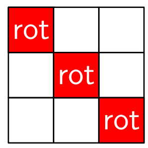


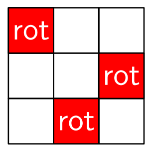
$\boxed{2}$ Lukas hat einen Dreifarbenstift mit roter, blauer und grüner Mine. Er will das 3×3-Karopapier bunt ausmalen, jedes Karo mit genau einer Farbe. Dabei soll in jeder Reihe und jeder Spalte jede Farbe nur genau einmal vorkommen. Er beginnt oben links mit rot. Wie viele verschiedene Färbungen des 3×3-Karopapiers sind möglich?



(**A**) 9 (**B**) 5 (**C**) 8 (**D**) 4 (**E**) 2

Lösung: Für die beiden noch rot auszumalenden Karos gibt es nach den Regeln der Aufgabe genau die zwei Möglichkeiten, die rechts abgebildet sind. Bei jeder dieser beiden Möglichkeiten kann in der ersten Zeile das blaue Karo das mittlere oder das rechte sein, wodurch in beiden Fällen festliegt, wie das 3×3-Karopapier bis zu Ende ausgemalt wird. Damit haben wir insgesamt $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten gefunden, wie Lukas die Felder ausmalen kann.





Klassenstufen 7 und 8

1 Die nebenstehende Tafel ist mit Sternchen und Herzen zu füllen, und zwar sollen in jeder Zeile und in jeder Spalte zwei $\bigstar$ und zwei $\heartsuit$ zu liegen kommen. Welche Symbole müssen an die Stellen X und Y gesetzt werden?

$\bigstar$		$\bigstar$	
		$\bigstar$	
	X		$\heartsuit$
	Y		

(**A**) X = $\bigstar$; Y = $\bigstar$ (**B**) X = $\bigstar$; Y = $\heartsuit$ (**C**) X = $\heartsuit$; Y = $\bigstar$
(**D**) X = $\heartsuit$; Y = $\heartsuit$ (**E**) nicht eindeutig bestimmt

Lösung: Da in der dritten Spalte bereits 2 Sterne sind, müssen dort 2 Herzen ergänzt werden. Dann befinden sich in der 3. Zeile 2 Herzen, so dass das Feld X und das andere noch leere Feld mit Sternchen belegt werden müssen. Nun befinden sich in der 1. Spalte 2 Sterne; es sind folglich 2 Herzen zu ergänzen. Dadurch haben wir nun in der 4. Zeile 2 Herzen, müssen also 2 Sterne eintragen, insbesondere auch auf dem Feld Y. Die Felder X und Y müssen also beide mit Sternchen belegt werden. Wie man sich leicht überzeugen kann, lässt sich die Tafel so weiter vollständig unter Einhaltung der Regel ausfüllen.

2 Stell dir zwei parallele Geraden vor und auf einer dieser Geraden vier, auf der anderen zwei Punkte. Wie viele Dreiecke lassen sich zeichnen, deren Ecken mit jeweils drei dieser sechs Punkte zusammenfallen?

(**A**) 6 (**B**) 16 (**C**) 15 (**D**) 12 (**E**) 21

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass ein Dreieck immer dann entsteht, wenn zwei Punkte auf einer der beiden Geraden liegen und der dritte Punkt auf der anderen Geraden. Wir halten nun die Gerade mit den 4 Punkten fest. Dann gibt es zu jedem Paar, das ich aus den 4 Punkten bilden kann, mit jedem der beiden Punkte auf der zweiten Geraden ein Dreieck. Da sich genau 6 Punktepaare aus den 4 Punkten auswählen lassen, entstehen hierdurch $6 \cdot 2 = 12$ Dreiecke. Nehmen wir nun die beiden Punkte der zweiten Geraden und verbinden sie mit jedem einzelnen der 4 Punkte der ersten Geraden, so kommen noch einmal 4 Dreiecke hinzu. Damit gibt es insgesamt $12 + 4 = 16$ Dreiecke.

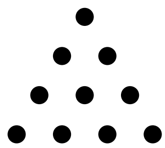
Klassenstufen 9 bis 13

1 Die Familien Kurz und Klein, jeweils aus Mutter, Vater und zwei Kindern bestehend, sind begeisterte Tischtennisspieler. Bei einem Turnier im Doppel tritt jedes mögliche Paar der Familie Kurz gegen jedes mögliche Paar der Familie Klein an. Wie viele Spiele hat jedes einzelne Familienmitglied zu absolvieren?

(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 18 (**E**) 24

Lösung: Aus den 4 Familienmitgliedern lassen sich in beiden Familien $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Paare bilden (Wer die Formel nicht kennt, findet die Anzahl auch sehr schnell durch Aufschreiben aller möglichen Paare.). Dabei ist jedes der Familienmitglieder in genau 3 Paaren „enthalten“, hat also insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ Spiele zu absolvieren.

2 Wie viele der 10 Punkte muss man mindestens entfernen, damit es unter den verbliebenen keine drei gibt, die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 7

Lösung: Es ist relativ leicht zu erkennen, dass die Zahl der Punkte, die man entfernen muss, größer als 2 sein muss, denn man findet leicht drei gleichseitige Dreiecke, die keine gemeinsamen Punkte haben, und von denen man folglich je mindestens einen Punkt entfernen muss (s. Abb. 1).

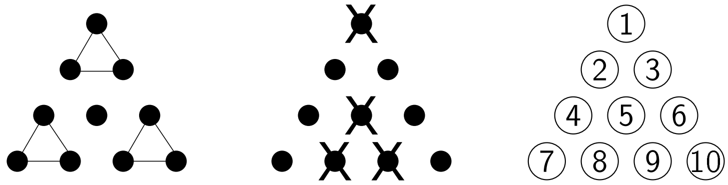


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3

Dass es genügt, 4 Punkte zu entfernen, um die Bildung von gleichseitigen Dreiecken aus den restlichen Punkten auszuschließen, lässt sich gut durch systematisches Probieren herausfinden (Abb. 2), wobei die Symmetrien, die es in der Ausgangsfigur gibt, hilfreich sind.
Wir wollen nun noch beweisen, dass es nicht ausreicht, 3 Punkte zu streichen. Wir stellen uns vor, dass die Punkte durchnummeriert sind (Abb. 3). Nun können wir feststellen, dass es genau die folgenden gleichseitigen Dreiecke gibt:

1 2 3	1 4 6	1 7 10	2 4 5	2 7 9
2 6 8	2 3 5	3 5 6	3 8 10	3 4 9
4 7 8	4 5 8	5 8 9	5 6 9	6 9 10

Von den drei Punkten 1, 7 und 10 muss gewiss einer entfernt werden, welcher ist aus Symmetriegründen egal. Entfernen wir also Punkt 1. Entfernen wir nun einen zweiten Punkt, z. B. den Punkt 2, so finden wir zwei Dreiecke, die keinen gemeinsamen Punkt haben, beispielsweise die Dreiecke 3 5 6 und 4 7 8. Nun können wir relativ schnell durchprobieren und überblicken, dass egal, welchen Punkt wir als zweiten entfernen, dann stets noch solche Dreiecke übrigbleiben, die keinen gemeinsamen Punkt haben.