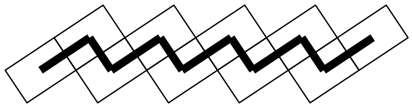
Mathe mit dem Känguru für zu Hause

24.März

Klassenstufen 3 und 4

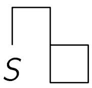
$\boxed{1}$ Von den Platten für die Terrasse hat sich Anton zehn genommen und einen Pfad gelegt (siehe Bild). Jede Platte ist 30 cm lang und 20 cm breit. Mit Kreide hat Anton ganz sauber und gerade die Mittelpunkte der Platten verbunden. Wie lang ist diese Zickzacklinie?

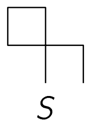


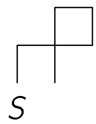
(**A**) 230 cm (**B**) 300 cm (**C**) 330 cm (**D**) 400 cm (**E**) 460 cm

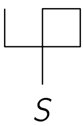
Lösung: Der Kreidestrich verläuft über alle 10 Platten. Auf der 2. bis 9. Platte ist er jeweils die halbe Länge plus die halbe Breite der Platte lang, also insgesamt $8 \cdot (15\,\text{cm} + 10\,\text{cm}) = 200\,\text{cm}$. Auf der ersten und letzten Platte ist jeweils nur die halbe Länge der Platte mit Kreide markiert, das sind $2 \cdot 15\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$. Insgesamt ist der dicke Kreidestrich also $200\,\text{cm} + 30\,\text{cm} = 230\,\text{cm}$ lang.
Eine andere Möglichkeit, die Länge auszurechnen, besteht darin, den Kreidestrich in kurze und lange Abschnitte zu unterteilen; es gibt 5 lange und 4 kurze. Die langen Abschnitte sind so lang wie eine Platte und sind daher 30 cm lang. Die kurzen Abschnitte sind so lang wie die Breite der Platten, 20 cm. Insgesamt ergibt das eine Länge von $5 \cdot 30\,\text{cm} + 4 \cdot 20\,\text{cm} = 230\,\text{cm}$.

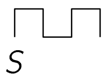
$\boxed{2}$ Nelly entwirft einen Tanz, Rita notiert Nellys Ideen. Nach dem ersten Schritt vorwärts ändert Nelly mit jedem weiteren Schritt die Richtung nach links oder rechts, und Rita schreibt für eine der Richtungsänderungen $+$, für die andere Richtungsänderung $-$.
Zwei Tage später hat Rita vergessen, wofür sie $+$ und wofür sie $-$ geschrieben hat. Von den unten skizzierten Tanzwegen, die jeweils bei S beginnen, kann nur einer zu Ritas Folge „$+---++$“ gehören. Welcher?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

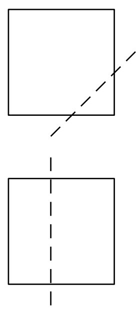
(**E**) 

Lösung: Da in der zu untersuchenden Schrittfolge dreimal hintereinander dasselbe Zeichen auftritt, kommt gewiss nur eine Skizze mit drei aufeinanderfolgenden Wendungen nach links oder rechts in Frage. Skizzieren wir drei Wendungen in dieselbe Richtung, erhalten wir ein Quadrat. Die Variante (**E**) fällt also weg. Auch Variante (**A**) können wir ausschließen. Zu (**A**) gehört zwar ein Quadrat, aber dieses Quadrat befindet sich hier am Ende der Schrittfolge, während es in der *gesuchten* Schrittfolge die drei gleichgerichteten Wendungen mittendrin gibt.
Angenommen, dem „$+$“ entspricht die Wendung nach rechts. Dann wäre die Skizze für (**C**) „$+-+++-$“, also nicht die richtige. Auch eine Änderung derart, dass „$+$“ für die Wendung nach links zu schreiben wäre, „$-$“ für die nach rechts, führt nicht zur Lösung. Bei (**B**) erhielten wir „$-+++-+$“, was ebenso wenig die Lösung ist wie die beim Vertauschen von links und rechts entstehende Skizze „$+--+-$“. Nun muss (**D**) die Lösung sein. Setzen wir wieder „$+$“ mit der Wendung nach rechts gleich, so erhalten wir hier „$+--++$“ und haben somit die Schrittfolge gefunden.

Klassenstufen 5 und 6

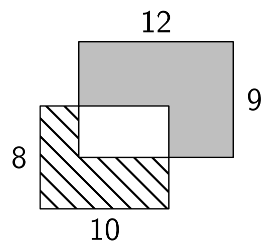
$\boxed{1}$ Ein quadratisches Papierstück ist entlang einer geraden Linie in zwei Teile zerschnitten worden. Welche Form kann *keines* der beiden Teile haben?

(**A**) Quadrat (**B**) Rechteck (**C**) rechtwinkliges Dreieck
(**D**) Fünfeck (**E**) gleichschenkliges Dreieck



Lösung: Wenn von einem Quadrat mit geradem Schnitt etwas abgeschnitten wird, so ist die Restfigur gewiss kein Quadrat mehr. Beim Quadrat sind alle vier Seiten gleich lang. Also müsste vom ursprünglichen Quadrat – mit einem geraden Schnitt – von *jeder* Seite ein gleich langes Stück abgeschnitten werden. Das ist jedoch nicht möglich. Das obere Bild zeigt eine Zerlegung in ein Fünfeck und ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck, (**C**), (**D**) und (**E**) sind also möglich. Im unteren Bild wird das Quadrat in zwei (nicht-quadratische) Rechtecke geteilt, auch (**B**) ist möglich.

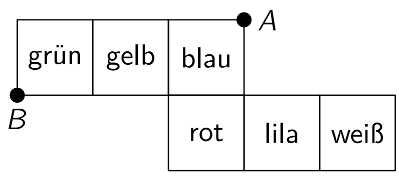
$\boxed{2}$ Ein 8×10-Rechteck und ein 9×12-Rechteck bedecken einander teilweise. Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Fläche, wenn der Flächeninhalt der gestreiften Fläche 37 ist?



(**A**) 60 (**B**) 62 (**C**) 62,5 (**D**) 64 (**E**) 65

Lösung: Der Flächeninhalt des kompletten unteren Rechtecks ist $8 \cdot 10 = 80$. Der Teil des unteren Rechtecks, der vom oberen bedeckt ist (die weiße Fläche), hat demzufolge einen Flächeninhalt von $80 - 37 = 43$. Diese weiße Fläche ergibt zusammen mit der grauen Fläche die Fläche des oberen Rechtecks. Hieraus errechnen wir schließlich den Flächeninhalt der grauen Fläche. Er ist: $9 \cdot 12 - 43 = 108 - 43 = 65$.

$\boxed{3}$ Wenn ich aus dem abgebildeten Würfelnetz einen Würfel falte, enthält eine der Würfelseiten die beiden Punkte A und B. Welche Farbe hat diese Seite?

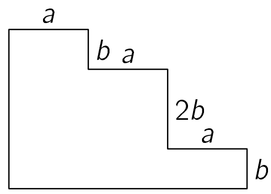


(**A**) grün (**B**) blau (**C**) rot (**D**) lila (**E**) weiß

Lösung: Jeder Eckpunkt eines Würfels gehört zu den drei Seiten, die sich in dieser Ecke treffen. Der Eckpunkt A gehört beim zusammengefalteten Würfel zu den Seiten blau, lila und weiß und B zu grün, rot und lila. Zur lila Seite gehören beide Punkte.

Klassenstufen 7 und 8

1 Der Umfang der rechts abgebildeten Figur ist gleich



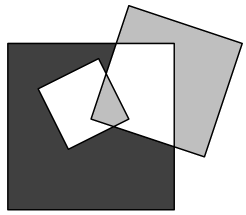
(**A**) $3a + 4b$ (**B**) $3a + 8b$ (**C**) $6a + 4b$
(**D**) $6a + 6b$ (**E**) $6a + 8b$

Lösung: Die linke senkrechte Kante der Figur ist genauso lang wie die drei anderen senkrechten Kanten zusammen. Ebenso ist die waagerechte Kante unten genauso lang wie die drei anderen waagerechten Kanten zusammen (siehe Bild). Der Umfang der Figur ist gleich der Summe aller Kanten, also gleich

$2 \cdot (b + 2b + b) + 2 \cdot (a + a + a) = 6a + 8b.$

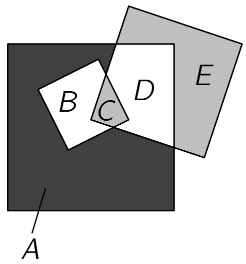
Dieser Umfang ist ebenso groß wie der des großen vervollständigten Rechtecks.

2 In einem Quadrat mit Seitenlänge 7 cm liegt ein Quadrat mit Seitenlänge 3 cm. Ein Quadrat mit Seitenlänge 5 cm schneidet beide Quadrate (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Um wie viel ist die schwarze Fläche größer als die Summe der beiden grauen Flächen?



(**A**) um $0\,\text{cm}^2$ (**B**) um $3\,\text{cm}^2$ (**C**) um $9\,\text{cm}^2$
(**D**) um $11\,\text{cm}^2$ (**E**) um $15\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir bezeichnen die Flächenteile wie im Bild mit A bis E. Gesucht ist $A - (C + E) = A - C - E$. Bekannt sind die Flächeninhalte der 3 Quadrate:



$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 49 \\ B + C &= 9 \\ C + D + E &= 25 \end{aligned}$$

Wir stellen die gesuchte Größe $A-C-E$ als Kombination der Quadratflächen dar:

$$\begin{aligned} A - C - E &= (A + B + C + D) - (B + C) - (C + D + E) \\ &= 49 - 9 - 25 = 15 \end{aligned}$$

Der gesuchte Flächeninhalt hängt nicht von der Lage der Quadrate ab. Wir könnten also auch eine ganz spezielle, zum Rechnen günstige Lage wählen.

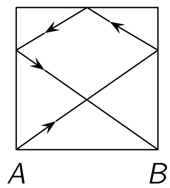
Klassenstufen 9 bis 13

$\boxed{1}$ Addiere ich die Längen von drei der vier Seiten eines Rechtecks, so kann ich als Ergebnis 20 oder 22 erhalten. Welchen Umfang hat das Rechteck?

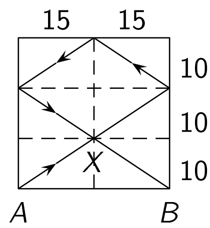
(**A**) 24 (**B**) 25 (**C**) 26 (**D**) 28 (**E**) 32

Lösung: Wir bezeichnen mit a die Länge der längeren, mit b die der kürzeren Seite des Rechtecks. Offenbar habe ich bei der größeren Summe die beiden längeren zur kürzeren addiert, also $2a + b$, bei der kleineren Summe die beiden kürzeren Seiten zur längeren, also $a + 2b$. Addiere ich beide Summen, so erhalte ich $3a + 3b = 20 + 22 = 42$. Also ist $a + b = 14$ und der Umfang $u = 2a + 2b = 2 \cdot 14 = 28$.

$\boxed{2}$ Im Winter wird bei uns oft eine quadratische $30\,\text{m} \times 30\,\text{m}$ große Eisfläche gespritzt. Neben Schlittschuhlaufen findet dort auch Puck-Schießen statt: Von Ecke A muss über die Bande Ecke B getroffen werden. Wie lang (in m) ist der gezeichnete Puck-Weg? (Achtung: Der Puck wird mit *dem* Winkel reflektiert, mit dem er auf die Bande trifft.)



(**A**) 35 (**B**) $30\sqrt{13}$ (**C**) 8
(**D**) $60\sqrt{3}$ (**E**) $30(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

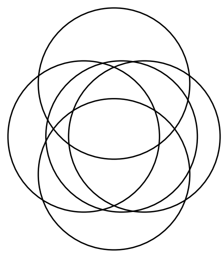


Lösung: Wegen der Symmetrie der Figur, die dadurch entsteht, dass der Puck stets mit dem Winkel reflektiert wird, mit dem er auftrifft, ist die gesuchte Länge genau das Sechsfache von $\overline{AX}$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $\overline{AX} = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{5^2(2^2 + 3^2)} = 5\sqrt{13}$. Für den gesamten Puck-Weg ergibt das $6 \cdot 5\sqrt{13}\,\text{m} = 30\sqrt{13}\,\text{m}$.

$\boxed{3}$ Wie viele Schnittpunkte können 5 Kreise miteinander höchstens haben?

(**A**) 15 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 21 (**E**) 25

Zusatzfrage: Wie viele Schnittpunkte können n Kreise höchstens miteinander haben?



Lösung: Zwei Kreise können sich in maximal zwei Punkten schneiden. Ein dritter hinzukommender Kreis kann jeden dieser beiden Kreise in maximal zwei Punkten schneiden, das ergibt $2 + 2 \cdot 2 = 6$. Kommt ein vierter Kreis hinzu, so schneidet er die drei bereits vorhandenen je in höchstens 2 Punkten, d. h., die Gesamtzahl der Schnittpunkte kann maximal $2+2\cdot2+2\cdot3 = 12$ sein. Ein weiterer hinzukommender Kreis kann stets jeden der anderen in höchstens zwei Punkten schneiden, so dass sich, kommt ein fünfter Kreis hinzu, ergibt, dass es nicht mehr als $12 + 2 \cdot 4 = 20$ Schnittpunkte geben kann. Es ergibt sich allgemein die Vermutung, dass die Anzahl der Schnittpunkte für n einander schneidende Kreise maximal $2+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+\cdots+2\cdot(n-1) = 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} = (n-1)\cdot n$ ist. Die Zeichnung belegt, dass für den Fall der 5 Kreise aus der Aufgabe die Maximalzahl 20 erreicht werden kann. Für den allgemeinen Fall haben wir zwar eine Formel vermutet, aber dass diese tatsächlich richtig ist, müsste nun noch bewiesen werden.