Mathe mit dem Känguru für zu Hause

15.April

Klassenstufen 3 und 4

$\boxed{\mathbf{1}}$ Auf die Frage ihres Großvaters, wie viel ihr Kaninchen wiegt, antwortet die kesse Hanni: „Es wiegt 450 g mehr als die Hälfte seines Gewichts.“ Wie schwer ist Hannis Kaninchen?

Lösung: Das Kaninchen wiegt 450 g mehr als die Hälfte seines Gewichts, also müssen die 450 g der Hälfte seines Gewichts entsprechen. Das Kaninchen ist also $2 \cdot 450\,\text{g} = 900\,\text{g}$ schwer.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Brunos Mutter will ein neues Rezept ausprobieren. Dafür braucht sie 400 ml Gemüsebrühe. Die Brühe hat sie in einem großen Topf vorbereitet, und nun findet sie kein 400-ml-Maß. Bruno entdeckt zwei leere Marmeladengläser. Das eine fasst 300 ml, das andere 500 ml. Kann es damit gelingen, 400 ml abzumessen?

Lösung: Bruno befüllt das kleine Glas zwei Mal und füllt es jeweils in das große Glas um, solange das möglich ist. Dann verbleiben in dem kleinen Glas $300\,\text{ml} + 300\,\text{ml} - 500\,\text{ml} = 100\,\text{ml}$ Brühe. Bruno leert nun das große Glas und füllt die 100 ml aus dem kleinen Glas in das große Glas.
Nun befüllt er das kleine Glas nochmal und befüllt damit das große Glas weiter. Im großen Glas befinden sich jetzt genau $100\,\text{ml} + 300\,\text{ml} = 400\,\text{ml}$.

Klassenstufen 5 und 6

1 Von drei kleinen Meerschweinchen sind zwei gleich schwer, das dritte ist ein bisschen leichter als die beiden anderen. Wie lässt sich mit einer einzigen Wägung auf einer Balkenwaage ohne Gewichte herausfinden, welches Meerschweinchen das leichtere ist?

Lösung: Wir setzen ein Meerschweinchen auf die eine Seite und ein zweites auf die andere Seite. Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist das dritte Meerschweinchen das leichtere. Ansonsten zeigt die Waage, welches der beiden Meerschweinchen das leichtere ist.

2 Um sicher zu sein, dass der Zauberlehrling das Große Zaubersprüchebuch nur dann aufschlagen kann, wenn er schon über gutes logisches Denkvermögen verfügt, gibt es für das Buch ein Kistchen, in dem sich 9 äußerlich völlig identische Schlüssel befinden. Mit höchstens zwei Wägungen auf einer Balkenwaage ohne Gewichte muss der richtige Schlüssel, der etwas schwerer als die anderen 8 ist, gefunden werden. Benutzt der Zauberlehrling einen falschen Schlüssel, so ist ihm das Buch auf ein ganzes Jahr verschlossen. Wie findet er den richtigen Schlüssel?

Lösung: Der Zauberlehrling muss zuerst 3 Schlüssel auf jede Schale legen. Ist die Waage im Gleichgewicht, so befindet sich der Schlüssel unter den 3 nicht gewogenen Schlüsseln. Ist sie nicht im Gleichgewicht, dann ist der Schlüssel einer der drei auf der Schale, die schwerer ist. Mithilfe der ersten Wiegeaufgabe kann der Schlüssel nun gefunden werden.

Klassenstufen 7 und 8

1 Aus einem Paket mit 1000 g Tee sollen 900 g entnommen werden. Zur Verfügung steht eine alte Balkenwaage, Wägestücke gibt es leider keine. Allerdings gibt es noch ein Päckchen dieses Tees mit 400 g. Wie kann man sich helfen?

Lösung: Es können zweimal 400 g abgewogen werden. Die verbleibenden 200 g werden ins Gleichgewicht gebracht, so werden die fehlenden 100 g abgewogen.

2 In eine Schachtel mit 74 völlig gleichen güldenen Ringen ist als 75. ein äußerlich nicht als falsch erkennbarer Ring geschmuggelt worden. Zweimal darf ich wiegen, um herauszufinden, ob der falsche Ring leichter oder schwerer als die güldenen Ringe ist. Wie ist das zu bewerkstelligen?

Lösung: Wir legen auf jede der beiden Waagschalen 20 Ringe.
Befindet sich die Waage im Gleichgewicht, sind alle 40 Ringe auf der Waage gleich schwer. Demnach ist der falsche Ring unter den 35 anderen. Diese wiegen wir gegen 35 der gleich schweren, und die Waage gibt an, ob der falsche Ring schwerer oder leichter ist.
Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so wiegen wir die schwereren 20 Ringe gegen 20 Ringe der noch nicht gewogenen. Ist die Waage nun im Gleichgewicht, ist der falsche Ring leichter, andernfalls schwerer.

Klassenstufen 9 bis 13

1 In einer Schraubenfabrik wurde einer oder mehreren der 5 Maschinen das falsche Material zugeführt. Statt der üblichen 10 g wiegen die aus dem falschen Material bestehenden Schrauben 11 g, doch äußerlich sind sie nicht zu unterscheiden. Welche Maschine(n) das betrifft, soll herausgefunden werden. Dies zu ermitteln, hat der Lehrmeister den Lehrlingen aufgetragen. Von jeder der Maschinen steht ein Eimer mit etwa 100 Schrauben bereit. Um die Pfiffigkeit der Lehrlinge zu testen, ist nur eine einzige Wägung mit der bereitstehenden Digitalwaage erlaubt. Wie kann diese Aufgabe gelöst werden?

Lösung: Eine mögliche Idee ist es, von jeder Sorte eine unterschiedliche Zweierpotenz an Schrauben zu nehmen.
Wir nehmen 1 Schraube der Sorte 1, 2 der Sorte 2, 4 der Sorte 3, 8 der Sorte 4 und 16 der Sorte 5. Das Gewicht abzüglich $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) \cdot 10\,\mathrm{g} = 310\,\mathrm{g}$ ergibt eine Zahl, aus der sich die kaputten Maschinen bestimmen lassen. Wir schreiben die als Differenz entstandene Zahl als Binärzahl auf. Dann geben die Stellen von hinten gelesen jeweils an, ob die Maschine ordnungsgemäß funktioniert. Sind zum Beispiel 19 g zu viel gemessen wurden, so bestimmen wir die zugehörige Binärdarstellung $19 = 10011_2$ und lesen ab, dass die Maschinen 1, 2 und 5 defekt sind.

2 Fünf Mädchen bereiten sich in einem Trainingslager auf einen wichtigen Mannschaftswettbewerb im Judo vor, bei dem sie alle in derselben Gewichtsklasse starten sollen. Am Ende der Trainingswoche stellt der Trainer beim Wiegen fest, dass drei der Mädchen dasselbe Gewicht haben und die beiden anderen zwar ein anderes, aber auch untereinander dasselbe. Da der Trainer ihnen nicht gesagt hat, wer von ihnen zur Dreier- und wer zur Zweiergruppe gehört, beschließen die Mädchen, das an einer Wippe herauszubekommen. „Das lässt sich mit dreimal Wippen auf jeden Fall entscheiden“, behauptet Chantal, das Matheass der Judogruppe. Stimmt das?

Lösung: Wir nennen die Mädchen A, B, C, D und E. Es wippen zuerst A und B und anschließend C und D. Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden (die anderen ergeben sich durch Vertauschen der Namen; $<$ steht für „leichter als“ und $=$ für „genauso schwer wie“):
Fall $A = B$, $C = D$: Jetzt wippen A und E. Sind sie gleich schwer, so bilden A, B, E die Dreiergruppe. Sind sie unterschiedlich schwer, so bilden C, D, E die Dreiergruppe.
Fall $A = B$, $C < D$: Jetzt wippen C und E. Sind sie gleich schwer, so bilden A, B, D die Dreiergruppe. Sind sie unterschiedlich schwer, so bilden A, B, C die Dreiergruppe.
Fall $A < B$, $C < D$: Jetzt wippen B und E. Sind sie gleich schwer, so bilden B, D, E die Dreiergruppe. Sind sie unterschiedlich schwer, so bilden A, C, E die Dreiergruppe.
Auf diese Weise lässt sich also tatsächlich mit dreimaligem Wiegen stets entscheiden, wer zu welcher Gruppe gehört.