Mathe mit dem Känguru für zu Hause

06. Mai

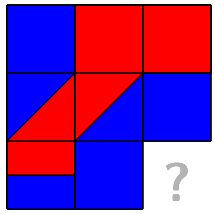
Klassenstufen 3 und 4

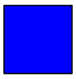
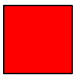
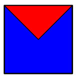
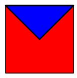
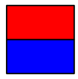
$\boxed{1}$ Welche der fünf Zeichnungen unten zeigt einen Ausschnitt der Zeichnung rechts?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir zählen die Strahlen des Sterns, es sind 9 wie im Ausschnitt (**D**).

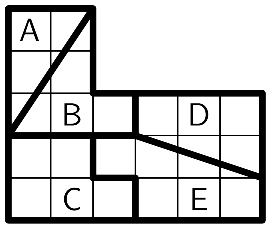
$\boxed{2}$ Welches Teil muss rechts unten angelegt werden, damit im vollständigen 3×3-Feld die blaue Fläche ebenso groß ist wie die rote?



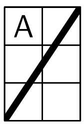
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

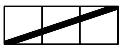
Lösung: Die drei zweifarbigen Quadrate im 3×3-Feld sind mit den beiden Farben je genau zur Hälfte gefärbt. Da wir durch das Hinzufügen des fehlenden Quadrats eine mit beiden Farben genau zur Hälfte gefärbte Gesamtfläche haben wollen, brauchen wir diese drei Teile also nicht zu berücksichtigen. Von den restlichen Quadraten sind drei blau und zwei rot. Folglich muss das rote Quadrat (**B**) angelegt werden.

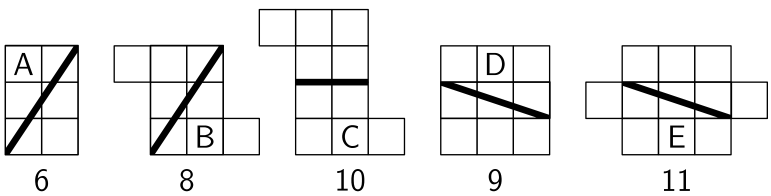
$\boxed{3}$ Camilla hat ein Stück Karopapier in 5 Teile geteilt. Nun möchte sie die Teile nach der Größe ihrer Fläche ordnen. Wie lautet die richtige Reihenfolge, wenn Camilla mit der kleinsten Fläche beginnt?



(**A**) A–B–D–C–E (**B**) D–A–C–B–E (**C**) A–D–C–B–E
(**D**) C–A–E–D–B (**E**) A–D–E–B–C

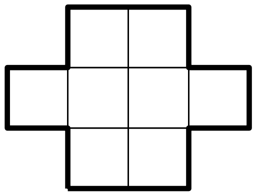
Lösung: Um die Fläche A in ihrer Größe abzuschätzen, überlegen wir uns, dass A genau die Hälfte des 2×3-Rechtecks 

einnimmt. Die Fläche A ist also genau 3 Kästchen groß. Da B ein Kästchen mehr als A umfasst, ist die Fläche von A kleiner als die von B. Die Fläche von B ist 4 Kästchen groß. Die Fläche von D setzt sich aus einem 3 Kästchen großen Rechteck und der Hälfte eines 3 Kästchen großen Rechtecks  zusammen. Folglich ist die Fläche von D größer als die von B. Die Fläche von D ist aber, da die Hälfte von 3 Kästchen kleiner als die Hälfte von 4 Kästchen ist, kleiner als die Fläche von C, die insgesamt $5 = 3 + 2$ Kästchen groß ist. Und die Fläche von E ist schließlich, da sie sich aus 4 ganzen Kästchen und – wie D – der Hälfte eines 3 Kästchen großen Rechtecks zusammensetzt, größer als die von C. Die Reihenfolge der Größe nach ist also: A–B–D–C–E.
Eine gute Methode, um diese Aufgabe zu lösen, ist es, alle Flächen zu verdoppeln. Dann lassen sich die Kästchen einfach auszählen und die Reihenfolge bestimmen.



Klassenstufen 5 und 6

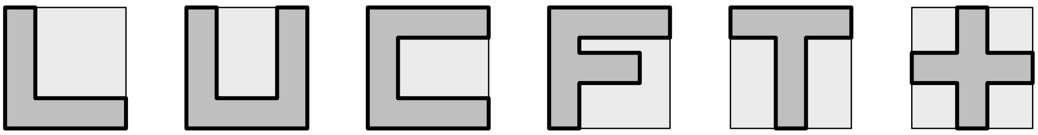
$\boxed{1}$ Die abgebildete Figur ist aus 8 Quadraten zusammengesetzt. Der Umfang, also die Länge des dick gezeichneten Randes dieser Figur, ist 42 cm lang. Wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?



(**A**) 8 cm^2 (**B**) 9 cm^2 (**C**) 24 cm^2
(**D**) 72 cm^2 (**E**) 128 cm^2

Lösung: Wir zählen die Quadratseiten, die den Umfang der Figur bilden. Es sind 14. Da der Umfang 42 cm lang ist, ist eine Quadratseite $42\text{cm} : 14 = 3\text{cm}$ lang. Die Figur besteht aus 8 Quadraten, folglich ist der gesuchte Flächeninhalt $8 \cdot 3\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 72\text{cm}^2$.

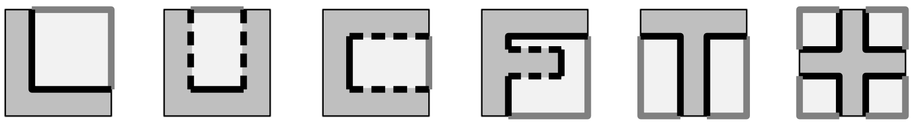
$\boxed{2}$ Maximilian bereitet für einen Aushang in der Schule große Buchstaben und Zeichen vor.



Nach dem Ausmalen zieht er bei allen den Rand dick nach und fragt sich, bei wie vielen der Buchstaben oder Zeichen dieser Rand länger ist als der Umfang des Quadrats, in das er sie gemalt hat. Wie viele sind das?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

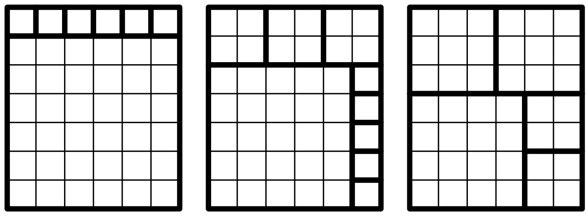
Lösung: Wir markieren dick grau den Teil des Quadratrandes, der nicht von vornherein mit einem Teil des Buchstabenrandes zusammenfällt, dick schwarz den Teil des Buchstabenrandes, der genauso lang ist wie der grau markierte Teil des Quadratrandes und gestrichelt den Teil des Buchstabenrandes, der keine Entsprechung im Quadratrand findet.



Gestrichelte Teile finden wir nur beim U, beim C und beim F. Der Rand dieser 3 Buchstaben ist länger als der Rand des Quadrats.

3 Marlen ist dabei, ein Rechteck, das 7 Kästchen lang und 6 Kästchen breit ist, so in Quadrate zu zerschneiden, dass keines der Kästchen zerschnitten wird. Sie könnte es in höchstens $6 \cdot 7 = 42$ Quadrate zerschneiden. Aber welches ist die *kleinste* Zahl von Quadraten, in die Marlen das Rechteck zerschneiden kann?

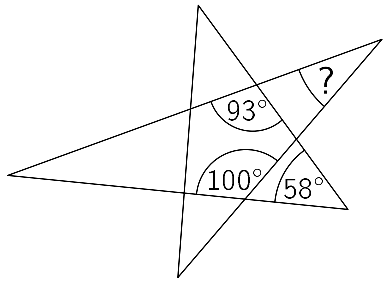
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8



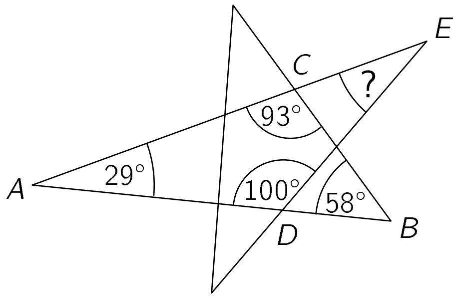
Lösung: Das größtmögliche Quadrat, das wir unterbringen können, ist 6×6 Kästchen groß. Schneiden wir ein solches Quadrat von dem Kästchenpapier ab, bleibt ein Streifen, den wir auf nur eine Weise in Quadrate zerschneiden können, und zwar in 6 Quadrate der Größe 1×1. Das sind insgesamt 7 Quadrate. Wenn das größte Quadrat, das wir ausschneiden, 5×5 Kästchen groß ist, so ist die günstigste Teilung, also die Teilung, bei der die wenigsten Quadrate ausgeschnitten werden müssen, sicher die in der Mitte gezeichnete, die aus 9 Quadraten besteht. Ist nun das größte Quadrat, das wir ausschneiden, 4×4 Kästchen groß, so finden wir die rechts gezeichnete Teilung in nur 5 Quadrate. Wäre das größte Quadrat höchstens 3×3 Kästchen groß, so reichen sicherlich nicht weniger als 5 Quadrate, da diese dann höchstens $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 < 42$ Quadrate umfassen.

Klassenstufen 7 und 8

1 Wie groß ist der mit dem Fragezeichen gekennzeichnete Winkel? (*Abb. nicht maßstabsgerecht*)

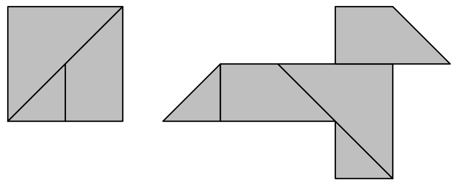


(**A**) 51° (**B**) 55° (**C**) 56°
(**D**) 60° (**E**) 65°



Lösung: Im Dreieck ABC können wir den Innenwinkel bei A berechnen: $180° - 58° - 93° = 29°$. Der gesuchte Winkel ist nun der einzige unbekannte Innenwinkel im Dreieck ADE. Wir erhalten ihn als Differenz $180° - 100° - 29° = 51°$.

2 Wanda zerschneidet mehrere gleich große Quadrate so in 3 Teile, wie es im Bild zu sehen ist. Aus einigen dieser Teile legt sie dann den daneben abgebildeten Vogel. Wie groß ist die Fläche des Vogels im Vergleich zur Fläche eines Quadrats?

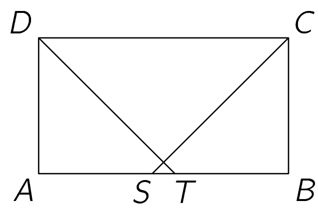


(**A**) halb so groß (**B**) genauso groß (**C**) doppelt so groß
(**D**) eineinhalbmal so groß (**E**) zweieinhalbmal so groß

Lösung: Der Vogel besteht aus einem großen Dreieck, zwei kleinen Dreiecken und zwei Trapezen. Also entspricht seine Fläche der von einem Quadrat (ein großes Dreieck, ein kleines Dreieck und ein Trapez), einem kleinen Dreieck und einem Trapez. Da ein kleines Dreieck und ein Trapez zusammen gerade ein halbes Quadrat ergeben, ist die Fläche des Vogels eineinhalbmal so groß wie die Fläche eines Quadrats.

3 In ein Rechteck mit den Seitenlängen 6 cm und 11 cm sind zwei Winkelhalbierende eingezeichnet, die eine der 11 cm langen Seiten in drei Teile teilen. Wie lang sind diese Teile?

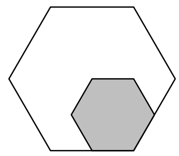
(**A**) 1 cm, 9 cm, 1 cm (**B**) 2 cm, 7 cm, 2 cm (**C**) 3 cm, 5 cm, 3 cm
(**D**) 4 cm, 3 cm, 4 cm (**E**) 5 cm, 1 cm, 5 cm



Lösung: Wir bezeichen die Ecken des Rechtecks mit A, B, C, D und die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel bei C und D mit der 11 cm langen Seite $\overline{AB}$ mit S und T. Die Dreiecke ATD und BCS haben beide einen 90°- und zwei 45°-Winkel, sind also gleichschenklig. Somit gilt: $|\overline{AT}| = |\overline{AD}| = |\overline{SB}| = |\overline{CB}| = 6\,\text{cm}$, woraus $|\overline{AS}| = |\overline{AB}| - |\overline{SB}| = 5\,\text{cm}$ folgt. Die drei Teile $\overline{AS}$, $\overline{ST}$ und $\overline{TB}$ sind also 5 cm, 1 cm und 5 cm lang.

Klassenstufen 9 bis 13

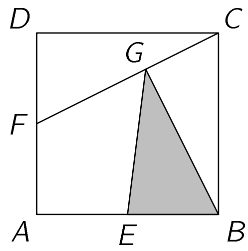
1 Eine Seite des großen regelmäßigen Sechsecks ist doppelt so lang wie eine Seite des kleinen regelmäßigen Sechsecks. Der Flächeninhalt des kleinen Sechsecks beträgt 4 cm^2. Welchen Flächeninhalt hat das große Sechseck?



(**A**) 20 cm^2 (**B**) 18 cm^2 (**C**) 16 cm^2
(**D**) 14 cm^2 (**E**) 12 cm^2

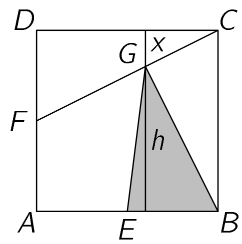
Lösung: Die Seitenlänge des großen regelmäßigen Sechsecks entsteht durch Verdoppeln der Seitenlänge des kleinen regelmäßigen Sechsecks. Dabei vervierfacht sich der Flächeninhalt auf 16 cm^2.

2 In einem Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 2 ist E Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und F Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$. Der Punkt G liegt so auf der Strecke $\overline{CF}$, dass $3 \cdot \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF}$ ist. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks EBG?

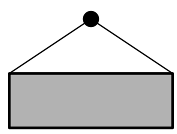


(**A**) $\frac{7}{10}$ (**B**) $\frac{4}{5}$ (**C**) $\frac{8}{5}$ (**D**) $\frac{3}{5}$ (**E**) $\frac{6}{5}$

Lösung: Die Länge von $\overline{EB}$ und von $\overline{DF}$ ist 1, da E und F Mittelpunkte der Quadratseiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ sind. Wir zeichnen durch G die Höhe h auf $\overline{EB}$ und verlängern diese zum Schnittpunkt mit CD. Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{x}{1} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{CF}|} = \frac{2}{5}$. Also ist $h = 2 - x = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks EBG ist $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$.



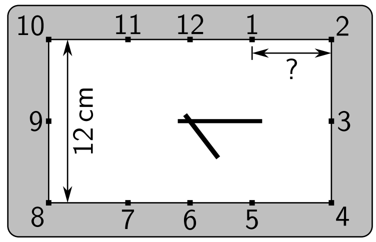
3 Mit Nagel und Faden hat Maksim 5 verschieden große rechteckige Bilder an die Wand gehängt. Die 5 Nägel hat er genau 2,50 m über dem Fußboden in die Wand geschlagen. Die 5 Fäden sind jeweils 2 m lang und enden an den beiden oberen Ecken (s. Abb.). Für welches Bild ist der Abstand der Unterkante des Bildes zum Fußboden am geringsten? (Angaben Breite $\times$ Höhe, jeweils in cm)



(**A**) 120×90 (**B**) 120×50 (**C**) 120×40 (**D**) 160×100 (**E**) 160×60

Lösung: Der Abstand der Unterkante der Bilder vom Fußboden ist am geringsten, wenn der Abstand des Nagels von der Bildunterkante am größten ist. Dieser ergibt sich als Summe aus der Höhe des entsprechenden Bildes und der Höhe im gleichschenkligen Dreieck, dessen Grundlinie die Breite des entsprechenden Bildes ist, während die Schenkel die je 1 m langen Hälften des Fadens sind. Da die Bilder nur entweder 120 cm oder 160 cm breit sind, kommen als Lösung nur (**A**) und (**D**) infrage.
Im ersten Fall ist die Höhe (in m) vom Nagel bis zur oberen Bildkante nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{1-(0{,}6)^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, im zweiten Fall $\sqrt{1-(0{,}8)^2} = 0{,}6$. Nach Addition der Höhe des entsprechenden Bildes erhalten wir für (**A**) $0{,}8 + 0{,}9 = 1{,}7$, und für (**D**) $0{,}6 + 1 = 1{,}6$, woraus folgt, dass (**A**) die Lösung ist.

4 Zacharias Zeiger hat sich eine modische, rechteckige Uhr gebaut. Die Zeiger drehen sich gleichmäßig wie bei jeder anderen Uhr. Der Abstand zwischen der 8 und der 10 beträgt 12 cm. Wie groß (in cm) ist der Abstand zwischen der 1 und der 2?



(**A**) $3\sqrt{3}$ (**B**) $2\sqrt{3}$ (**C**) $4\sqrt{3}$
(**D**) $2+\sqrt{3}$ (**E**) $12-3\sqrt{3}$

Lösung: Im rechten oberen Ausschnitt des hellen Rechtecks in der Uhr bezeichnen wir mit M den Drehpunkt der Zeiger, das ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Rechtecks. Der Punkt A gehört zur 1, B zur 2 usw. Da sich die Zeiger gleichmäßig drehen, beträgt jeder Winkel bei M von einer Zahl zur nächsten Zahl $360^\circ : 12 = 30^\circ$. $\triangle MDB$ ist gleichseitig, da $|\overline{MD}| = |\overline{MB}|$ und der Winkel $\measuredangle DMB = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ groß ist. Damit ist $\measuredangle ABM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ und folglich $\triangle MBA$ gleichschenklig, also $|\overline{MA}| = x$. $\triangle MAL$ ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks und folglich ist $|\overline{AL}| = \frac{x}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann in $\triangle MAL$ $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (6\,\text{cm})^2$, woraus $x = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ folgt.