# Mathe mit dem Känguru für zu Hause

**05. Mai**

## Klassenstufen 3/4

Für die Jüngeren sind diesmal knifflige Darstellungen von Zahlen zu finden. Es können sich aber auch Ältere daran versuchen, denn auch wenn es „nur“ um kleine natürliche Zahlen geht, braucht es Ideen und gutes Kombinieren.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Wir suchen Darstellungen der natürlichen Zahlen von 1 bis 20 – und wer mag, der kann auch weitergehen bis zur 100 oder gar bis zur 1000. Die Zahlen sollen mit so wenigen wie möglich Ziffern kombiniert werden, wobei stets von 1 zu 2 zu 3 usw. die Ziffern verwendet werden. Für die ersten Zahlen schreiben wir Beispiele auf, damit klar wird, welche Kombinationen erlaubt sind.

| | |
|---|---|
| $0 = 1 + 2 - 3$ | $5 = 1 \cdot 2 + 3$ |
| $1 = 1 \cdot 2 + 3 - 4$ | $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$ |
| $2 = 1 \cdot 2$ | $7 = 1 + 2 \cdot 3$ |
| $3 = 1 + 2$ | $8 = 12 : 3 + 4$ |
| $4 = 12 : 3$ | $9 = 12 - 3$ |

Wer findet die nächsten Lösungen für die Zahlen 10 bis 20 und benutzt dabei so wenig wie möglich verschiedene Ziffern mit 1 beginnend?

*Lösung:*

$10 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$
$11 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 = 12 + 3 - 4$
$12 = 12$
$13 = 12 - 3 + 4$
$14 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4$
$15 = 12 + 3$
$16 = 12 : 3 \cdot 4$
$17 = 12 : 3 \cdot 4 - 5 + 6 = 1 + 23 + 4 - 5 - 6$
$18 = 12 - 3 + 4 + 5$
$19 = 12 + 3 + 4 = 1 \cdot 23 - 4$
$20 = 1 + 23 - 4$

$\boxed{\textbf{2}}$ Nun wollen wir auf unterschiedliche Art die 1 darstellen. Zuerst sollen nur 1, 2 und 3 verwandt werden, dann immer mehr bis zur 9, die durch $+, -, \cdot, :$, durch Verbinden von Ziffern oder durch Klammern die 1 ergeben.

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 2 \quad 3 \quad = 1 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad = 1 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad = 1 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad = 1 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad = 1 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad = 1 \\
1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad = 1
\end{array}
$$

*Lösung:*

$$
\begin{aligned}
(1+2):3 &= 1 \\
12:3:4 &= 1 \\
(1+23):4-5 &= 1 \\
(12+3-4-5):6 &= 1 \\
12+3+4-5-6-7 &= 1 \\
12-3-4+5+6-7-8 &= 1 \\
1+23-4-5-6-7+8-9 &= 1
\end{aligned}
$$

Es geht auch mit ausschließlich einstelligen Zahlen, allerdings mit vielen Klammern

$$
\begin{aligned}
(1+2):3 &= 1 \\
1\cdot 2+3-4 &= 1 \\
((1+2)\cdot 3-4):5 &= 1 \\
(1\cdot 2+3-4+5):6 &= 1 \\
\{[(1+2)\cdot 3-4]:5+6\}:7 &= 1 \\
[(1+2):3\cdot 4+5+6-7]:8 &= 1 \\
(1\cdot 2+3+4-5+6+7-8):9 &= 1
\end{aligned}
$$

## Klassenstufen 5/6

$\boxed{\mathbf{1}}$ Die Zwillingsschwestern Anne und Kathrin bekommen stets gleiches Taschengeld. Heute war Taschengeldtag, und Anne kauft sich von ihrem Taschengeld 2 kleine Kugeln Eis. Nun hat sie noch 3,90 Euro. Kathrin hat noch mehr Appetit auf Eis. Sie kauft sich sogar 3 kleine Kugeln Eis und behält 3,10 Euro übrig. Wie viel Taschengeld haben die beiden bekommen?

*Lösung:* Anne hat $3,90 - 3,10 = 0,80$ Euro mehr übrig als Kathrin und eine Kugel Eis weniger gekauft, also kostet eine Kugel Eis 0,80 Euro. Demzufolge hat Anne für ihr Eis mit 2 Kugeln 1,60 Euro ausgegeben und am Anfang $3,90 + 1,60 = 5,50$ Euro Taschengeld erhalten.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Brunos Vater ist von einer großen Messe nach Hause gekommen und packt zu seinem eigenen Erstaunen 20 Kugelschreiber aus. Bruno freut sich und zählt: Es ist 1 Kugelschreiber mit roter Mine mehr als es Kugelschreiber mit schwarzer Mine sind. Und es sind außerdem 4 mit schwarzer Mine mehr als es Kugelschreiber mit blauer Mine sind. Und von denen mit blauer Mine gibt es 1 Kugelschreiber mehr als es Kugelschreiber mit grüner Mine sind. Wie viele Kugelschreiber mit roter Mine hat Brunos Vater mit nach Hause gebracht?

*Lösung:* Bruno nimmt zunächst von jeder Farbe so viele Kugelschreiber weg, dass von jeder Farbe gleich viele Kugelschreiber auf dem Tisch bleiben. Das sind 6 Kugelschreiber mit roter Mine, 5 Kugelschreiber mit schwarzer Mine und 1 Kugelschreiber mit blauer Mine. Dann bleiben auf dem Tisch $20 - 6 - 5 - 1 = 8$ Kugelschreiber übrig. Da jede der vier Farben gleich oft vorkommt, müssen 2 Kugelschreiber je Farbe übrigbleiben.
Es waren anfangs 8 Kugelschreiber mit roter Mine, 7 Kugelschreiber mit schwarzer Mine, 3 Kugelschreiber mit blauer Mine und 2 Kugelschreiber mit grüner Mine.

## Klassenstufen 7/8

**1** Bestimme zwei Zahlen, deren Summe, Produkt und Quotient die gleiche Zahl ergeben.

*Lösung:* Wir nennen die Zahlen a und b. Dann ist $a \cdot b = a : b$, woraus $b^2 = 1$ folgt.
Für $b = 1$ wäre das Produkt der beiden Zahlen $a$ und die Summe $a + 1$. Produkt und Summe können so aber nicht gleich sein.
Für $b = -1$ ist das Produkt $-a$ und die Summe $a - 1$. Wir setzen die beiden Zahlen gleich und formen nach $a$ um.

$$-a = a - 1 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Für die beiden Zahlen $\frac{1}{2}$ und $-1$ sind Summe, Produkt und Quotient gleich, nämlich $-\frac{1}{2}$.

**2** Welchen Wert hat $x + y$, wenn $x + y + x \cdot y = 34$ ist, wenn $x$ und $y$ positive ganze Zahlen sind?

*Lösung:* Es lässt sich $x + y + x \cdot y + 1$ als Produkt schreiben: $(x + 1) \cdot (y + 1) = x \cdot y + x + y + 1$. Also ist $(x + 1)(y + 1) = 35$. Da $x$ und $y$ positive ganze Zahlen sind, gilt sowohl $x + 1 \geq 2$ als auch $y + 1 \geq 2$. Folglich gibt es für 35 nur die Zerlegung $35 = 5 \cdot 7$, woraus $x = 4$ und $y = 6$ oder umgekehrt $x = 6$ und $y = 4$ folgt, in jedem Fall ist $x + y = 10$.

*Alternative Lösung:* Wir stellen die Gleichung nach $x$ um.

$$\begin{aligned} x + y + x \cdot y &= x \cdot (1 + y) + y = 34 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{34 - y}{1 + y} = \frac{35 - (y + 1)}{y + 1} = \frac{35}{y + 1} - 1 \end{aligned}$$

Da x ganzzahlig ist, muss y+1 ein Teiler von 35 sein. Da $1 + y \geq 2$ kommen dafür nur 5, 7 und 35 in Frage. Dann ist y 4, 6 oder 34 und x entsprechend 6, 4 oder 0. Die letzte Lösung kommt nicht in Frage, da x positiv sein muss. In jedem Fall ist $x + y = 10$.

## Klassenstufen 9 bis 13

Für die Schülerinnen und Schüler aus den Klassen 9 bis 13 haben wir diesmal ziemlich harte Nüsse. Wir sind gespannt, wer sie knacken kann:

$\boxed{1}$ Ersetze einige der Minuszeichen durch Pluszeichen, sodass das Ergebnis 2020 ist.

$$2020^2 - 2019^2 - 2018^2 - \cdots - 3^2 - 2^2 - 1^2$$

*Lösung:* Wir betrachten Blöcke von 4 Zahlen und versuchen für die 4 Zahlen das Ergebnis 4 zu erreichen. Tatsächlich ist

$$(x+3)^2 - (x+2)^2 - (x+1)^2 + x^2 = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 4x^2 + 4) - (x^2 + 2x + 1) + x^2 = 4$$

In jedem Viererblock setzen wir ein Pluszeichen vor die erste und die vierte Zahl.

$$(2020^2 - 2019^2 - 2018^2 + 2017^2) + \cdots + (4^2 - 3^2 - 2^2 + 1^2) = 4 + \cdots + 4 = 2020$$

$\boxed{2}$ Die Summer zweier Zahlen ist 1. Die Summe der Quadrate der beiden Zahlen ist 2. Wie groß ist die Summe der 4. Potenzen der beiden Zahlen?

*Lösung:* Wir bezeichnen die beiden Zahlen mit $a$ und $b$. Wir wissen, dass $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1^2 - 2ab = 2$ gilt. Also ist $ab = -\frac{1}{2}$. Analog gilt $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 2^2 - 2\big(-\frac{1}{2}\big)^2 = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

$\boxed{3}$ Es ist zu beweisen, dass die Gleichung

$$2x^2 - 5y^2 = 7$$

keine ganzzahlige Lösung hat.

*Lösung:* Angenommen $(x; y)$ ist ein Lösungspaar.
Dann ist gewiss $y$ eine ungerade Zahl. Wir setzen $y = 2z + 1$ und setzen ein: $2x^2 - 5(4z^2 + 4z + 1) = 2x^2 - 20z(z+1) - 5 = 7$ bzw. $x^2 - 10z(z+1) = 6$. Damit dies gilt, muss $x$ eine gerade Zahl sein. Wir setzen $x = 2u$ und setzen ein: $4u^2 - 10z(z+1) = 6$ bzw. $2u^2 - 5z(z+1) = 3$. Da von den beiden Zahlen $z$ und $z+1$ stets eine gerade ist, ist die linke Seite der Gleichung gerade, kann also nicht gleich 3 sein.

$\boxed{4}$ Es sind die reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems zu finden:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 17 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

*Lösung:* Angenommen, $(x; y)$ ist ein Lösungspaar.
Es ist $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = 17$. Wenn wir $x + y$ durch 3 ersetzen, erhalten wir $(9 - 2(xy))^2 - 2(xy)^2 = 17$ und durch Umstellen eine quadratische Gleichung für $xy$: $81 - 36(xy) + 4(xy)^2 - 2(xy)^2 - 17 = 0$ bzw. $2(xy)^2 - 36(xy) + 64 = 0$ und schließlich $(xy)^2 - 18(xy) + 32 = 0$, woraus wir die Lösungen $(xy)_{1;2} = 9 \pm \sqrt{81 - 32} = 9 \pm 7$.
Wir haben nun die folgenden beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ xy &= 16 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ xy &= 2 \end{aligned}$$

Das 1. Gleichungssystem hat keine reellen Lösungen. Die Lösung des 2. Gleichungssystems liefert für $(x; y)$ die beiden Lösungspaare $(2; 1)$ und $(1; 2)$. Eine Probe bestätigt, dass beide Paare Lösungen sind.