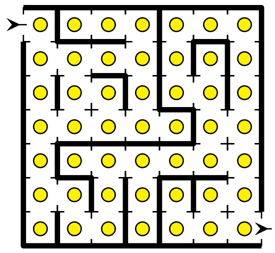
Mathe mit dem Känguru für zu Hause

02.April

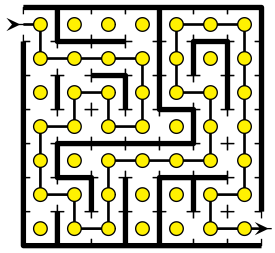
Klassenstufen 3 und 4

1 Ich habe ein Computerspiel, bei dem ich ein Labyrinth durchlaufen und dabei „Juwelen“ einsammeln muss. In jeder Zelle ist ein „Juwel“, aber ich darf keine der Zellen zweimal betreten. Ich möchte so viele „Juwelen“ wie möglich sammeln. Wie viele sind das?

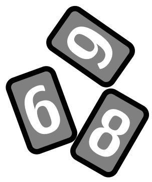


(**A**) 17 (**B**) 33 (**C**) 37 (**D**) 41 (**E**) 49

Lösung: Auf dem eingezeichneten Weg durch das Labyrinth kann ich von den 49 „Juwelen“ 37 einsammeln. Die restlichen „Juwelen“ liegen in Nischen, in die ich zwar hineingehen, aber nicht wieder herauskommen kann, ohne die Regeln des Spiels zu verletzen. Auf jedem anderen gültigen Weg durch das Labyrinth liegen weniger als 37 „Juwelen“. Also kann ich höchstens 37 „Juwelen“ sammeln.



2 Mit den drei Karten im Bild lassen sich Zahlen bilden, z. B. 989 oder 689. Wie viele *verschiedene 3-stellige* Zahlen lassen sich mit diesen Karten bilden?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Mit den zwei Karten 6 und 9 lassen sich die 4 Zahlen 66, 99, 69 und 96 bilden. Die 8 können wir dann davor, dazwischen oder dahinter stellen. Es ergeben sich die folgenden 12 Zahlen:
668 998 698 968   686 989 689 986   866 899 869 896

Klassenstufen 5 und 6

$\boxed{1}$ Manchmal spielen wir zum Beginn unserer Mathe-AG ein Konzentrationsspiel. Wir 14 Kinder sagen der Reihe nach alle ungeraden Zahlen, jedes Kind eine Zahl. Allerdings lassen wir die Zahlen aus, die als Ziffer die 3 enthalten. Das erste Kind nennt 1, das nächste nicht 3, sondern 5, das nächste 7 usw. Welche Zahl muss das 14. Kind nennen?

(**A**) 17 (**B**) 23 (**C**) 29 (**D**) 41 (**E**) 45

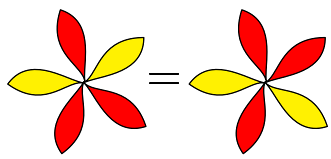
Lösung: Wir listen die ersten Zahlen auf, die zu nennen sind: 1; 5; 7; 9. Es ist bereits zu erkennen, dass auch von den Zahlen zwischen 10 und 20 und zwischen 20 und 30 wieder jeweils 4 existieren, die bei dem Abzählspiel genannt werden müssen. Wer mag, kann die auch hinschreiben, es dauert nicht lange: 11; 15; 17; 19; 21; 25; 27; 29. Damit haben wir schon $3 \cdot 4 = 12$ der gesuchten „Rufzahlen“. Die restlichen beiden müssen jetzt größer als 40 sein, denn alle 30-er Zahlen fallen weg. Es sind 41 und 45, und 45 ist demnach diejenige Zahl, die das 14. Kind zu rufen hat.

$\boxed{2}$ Die Pizzeria „Am Turm“ macht Pizza für die Mittagspause im lokalen Krankenhaus. Damit es schnell geht, wurde die Anzahl der Zutaten stark reduziert. Zu jeder Pizza gehören Mozzarella und Tomaten. Von den vier Beilagen Sardellen, Schinken, Paprika und Champignons kann dann eine oder zwei dazugenommen werden. Wie viele verschiedene Pizzen hat die Pizzeria im Angebot?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 20

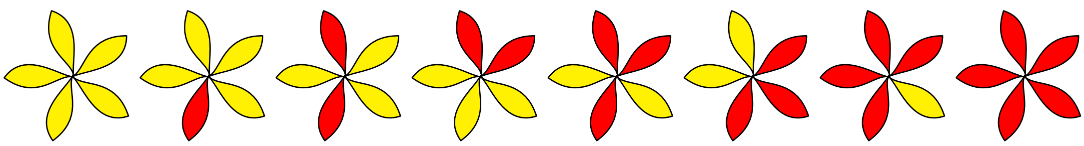
Lösung: Wir überlegen uns, wie viele verschiedene Beläge für eine Pizza möglich sind. Mit nur einer Beilage gibt es die vier Möglichkeiten Sardellen, Schinken, Paprika und Champignons. Hinzu kommen Mischungen aus je zwei Beilagen. Und davon gibt es noch einmal 6, nämlich Sardellen–Schinken, Sardellen–Paprika, Sardellen–Champignons, Schinken–Paprika, Schinken–Champignons und Paprika–Champignons. Es kann also aus insgesamt 10 verschiedenen Pizzen ausgewählt werden.

$\boxed{3}$ Für eine Wandzeitung zum Frühling basteln Carolin und Alex fünfblättrige Blumen mit roten und gelben Blütenblättern. Damit die Wandzeitung besonders schön wird, möchten die beiden alle möglichen fünfblättrigen Blumen mit den Blütenblättern basteln. Blumen, die durch Drehen aus anderen Blumen entstehen, gelten als gleich (s. Beispiel rechts). Wie viele *verschiedene* Blumen können Carolin und Alex basteln?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Die 5 Blütenblätter können sich auf folgende Weise zusammensetzen: (I): 5 gelb, 0 rot; (II): 4 gelb, 1 rot; (III): 3 gelb, 2 rot; (IV): 2 gelb, 3 rot; (V): 1 gelb, 4 rot und (VI): 0 gelb, 5 rot. Das sind 6 Möglichkeiten. In den Fällen (I), (II), (V) und (VI) gibt es nur eine Variante der Anordnung, in den Fällen (III) und (IV) jedoch können die 2 gleichfarbigen Blätter nebeneinander oder durch eines der 3 anderen Blätter getrennt sein. Insgesamt sind es also $4 + 2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten.



Klassenstufen 7 und 8

$\boxed{1}$ Beim Blick auf ihre Digitaluhr muss Silvie schmunzeln: „20:20, das ist ja genau die Jahreszahl!“ Wann erscheint das nächste Mal eine Uhrzeit, in der wir die vier Ziffern $0, 0, 2, 2$ in irgendeiner Reihenfolge vorfinden?

(**A**) in 42 Minuten (**B**) in 60 Minuten (**C**) in 80 Minuten
(**D**) in 100 Minuten (**E**) in 120 Minuten

Lösung: Nach 20:20 gibt es mit derselben Stundenzahl keine weitere Uhrzeit mit diesen vier Ziffern. In der darauffolgenden Stundenzahl kommt eine 1 vor. Die nächste Uhrzeit mit den vier Ziffern ist 22:00. Von 20:20 bis dahin vergehen 1 Stunde und 40 Minuten, das sind insgesamt 100 Minuten.

$\boxed{2}$ Ich denke mir alle 3-stelligen Zahlen aufgeschrieben. Bei wie vielen ist das Produkt der 3 Ziffern gleich 6?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Es sei $\overline{abc}$ die dreistellige Zahl. Dann soll also $a \cdot b \cdot c = 6$ sein. Da $6 = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ ist und andere Zerlegungen in drei Faktoren nicht existieren, gibt es also mit 116, 161, 611, 123, 132, 213, 231, 312 und 321 genau 9 Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

$\boxed{3}$ Ein Zug besteht aus 5 Waggons, die mit römischen Zahlen I, II, III, IV und V nummeriert sind. Vorn fährt die Lokomotive. Auf wie viele verschiedene Weisen können die Wagen aneinander gereiht werden, wenn garantiert sein soll, dass Waggon I näher an der Lok ist als Waggon II?

(**A**) 120 (**B**) 72 (**C**) 60 (**D**) 48 (**E**) 30

Lösung: Für die Waggons I und II sind folgende Positionen möglich:

I II □ □ □	□ I II □ □	□ □ I II □
I □ II □ □	□ I □ II □	□ □ I □ II
I □ □ II □	□ I □ □ II	□ □ □ I II
I □ □ □ II		

Die anderen drei Waggons können in jeder der 10 unterschiedlichen Positionen, die die Waggons I und II im Zug einnehmen können, in allen 6 möglichen Vertauschungen, die diese drei Wagen untereinander einnehmen können, nämlich

III IV V	IV III V	V III IV
III V IV	IV V III	V IV III

angeordnet sein. Insgesamt gibt es folglich $10 \cdot 6 = 60$ Möglichkeiten, die Waggons in der geforderten Weise aneinander zu reihen.

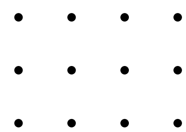
Klassenstufen 9 bis 13

1 Wie viele 4-stellige, durch 5 teilbare natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffern alle ungerade sind?

(**A**) 900 (**B**) 625 (**C**) 250 (**D**) 125 (**E**) 95

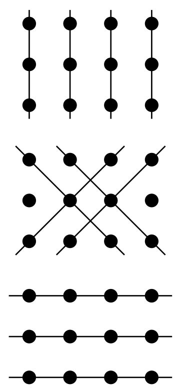
Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass bei allen gesuchten vierstelligen Zahlen die letzte Ziffer 5 sein muss. Für die Tausender-, Hunderter- und Zehnerstelle hingegen kommt jede der Zahlen 1, 3, 5, 7 und 9 unabhängig voneinander als Ziffer in Frage. Da dies 5 Ziffern sind, die für die 3 möglichen Stellen infrage kommen, handelt es sich um $5^3 = 125$ Zahlen.

2 Aus den zwölf Punkten des abgebildeten Gitters werden zufällig drei ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen?



(**A**) $\frac{1}{12}$ (**B**) $\frac{1}{11}$ (**C**) $\frac{1}{10}$ (**D**) $\frac{1}{16}$ (**E**) $\frac{1}{20}$

Lösung: Wir erfassen zuerst, welche Möglichkeiten es gibt, Geraden so zu legen, dass mindestens drei der Punkte aus dem (3×4)-Gitter darauf liegen. Die Möglichkeiten sind in den Zeichnungen zusammengestellt. Die oben gezeichneten Geraden enthalten je genau drei, die unten gezeichneten je vier Punkte. In jedem der Fälle, dass die Gerade 4 Punkte enthält, gibt es genau 4 Möglichkeiten, 3 Punkte auszuwählen. Insgesamt gibt es bei den 12 Punkten $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$ Möglichkeiten, drei auszuwählen.



In unserer ersten Überlegung hatten wir gefunden, dass in $4 + 2 + 2 + 3 \cdot 4 = 20$ Fällen diese Punkte auf einer Geraden liegen. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{20}{220} = \frac{1}{11}$.

3 In einer Schachtel befinden sich je 3 rote, grüne, gelbe und blaue Karten. Die 3 Karten jeder Farbe werden mit den Zahlen 1, 2, 3 nummeriert. Es werden 3 Karten zufällig aus der Schachtel entnommen. Welches Ereignis ist das wahrscheinlichste?

(**A**) Alle 3 Karten haben dieselbe Farbe.

(**B**) Die 3 Karten haben unabhängig von ihrer Farbe die Nummern 1, 2 und 3.

(**C**) Die 3 Karten haben 3 verschiedene Farben.

(**D**) Alle Karten haben dieselbe Nummer.

(**E**) Die 4 Ereignisse (**A**) - (**D**) sind gleich wahrscheinlich.

Lösung: Wir können von jedem Ereignis die Wahrscheinlichkeit ausrechnen. Da sich 12 Karten in der Schachtel befinden, gibt es $\binom{12}{3} = 220$ verschiedene Möglichkeiten, drei Karten zu ziehen. Für (**A**) gibt es genau 4 Möglichkeiten, also ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{220} = \frac{1}{55}$. Für (**B**) gibt es $\frac{12 \cdot 8 \cdot 4}{6} = 64$ Möglichkeiten. (Man zieht als erste Karte eine der 12, als zweite eine der 8 mit einer anderen Zahl als die erste, und als dritte eine der 4 mit noch nicht gezogener Zahl. Die resultierende Gruppe kann in $3! = 6$ verschiedenen Reihenfolgen entstehen.) Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{64}{220} = \frac{16}{55}$. Für (**C**) gibt es $\frac{12 \cdot 9 \cdot 6}{6} = 108$ Möglichkeiten. (Man zieht als erste Karte eine der 12, als zweite eine der 9 mit einer anderen Farbe als die erste, als dritte eine der 6 mit noch nicht gezogener Farbe.) Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{108}{220} = \frac{27}{55}$. Für (**D**) gibt es zu jeder Zahl 4 Möglichkeiten. (Die Karte jeder Farbe kann ausgelassen werden.) Das ergibt insgesamt $3 \cdot 4 = 12$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{12}{220} = \frac{3}{55}$. Also ist (**C**) die Lösung.