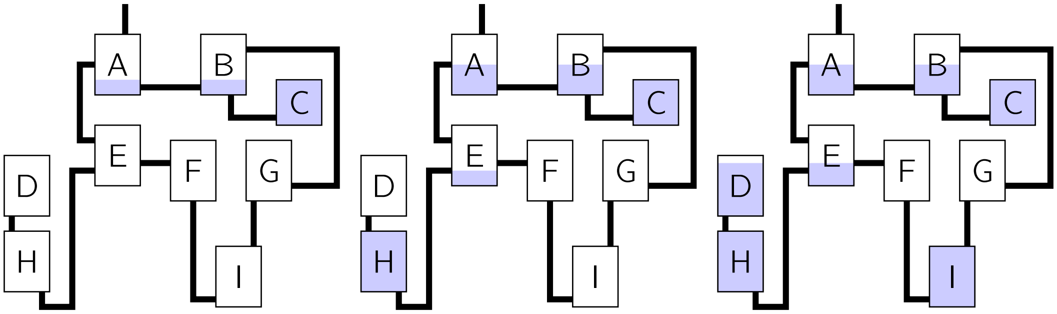
Journal Kvantiks
Rätsel-Kalender 2019

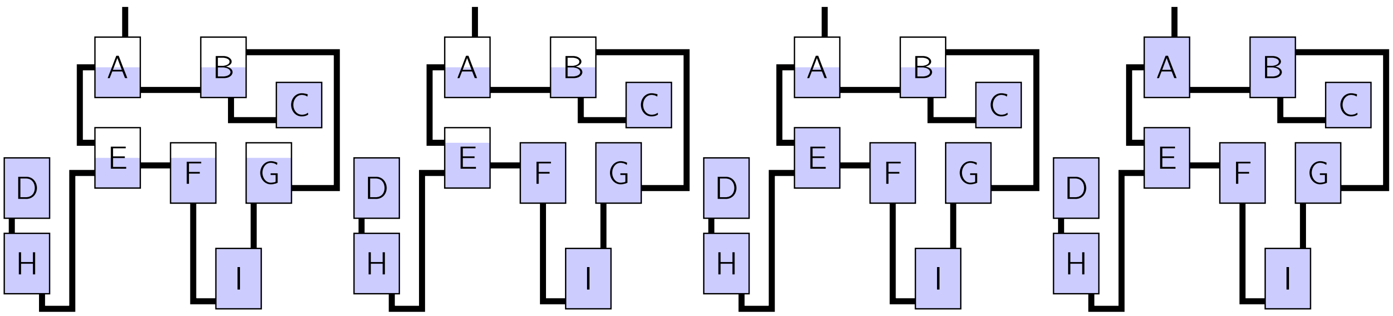
Lösungen

1 Januar – In welcher Reihenfolge laufen die Behälter voll?

Als erstes läuft der Behälter C voll, als zweites der Behälter H und als drittes der Behälter I.

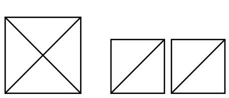


Dann folgt D, dann gleichzeitig F und G, dann E und zum Schluss gleichzeitig A und B.

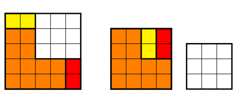


2 Februar – Aus Eins mach Zwei

Wir geben zu jeder Aufgabe eine oder zwei Möglichkeiten an. Die Möglichkeit bei 3. ist auch eine Möglichkeit für 1., und die Möglichkeiten für 4. sind auch Möglichkeiten für 1. und 3.

1. 

2. 

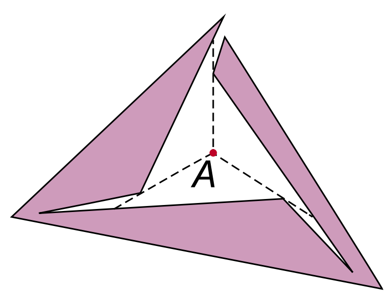
3. 

4. 

Bei 3. und 4. wurde ausgenutzt, dass $5^2 = 4^2 + 3^2$ gilt.

3 März – Ein beeindruckendes Vieleck

Die Abbildung zeigt ein Beispiel, welches mithilfe des Vielecks aus der Aufgabe gefunden werden kann.



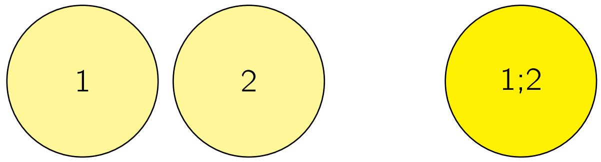
4 April – Schiffe am Anlegeplatz

So kann der kleine Schlepper sein Tau vom Poller lösen:

5 Mai – Scheinwerfer über der Arena

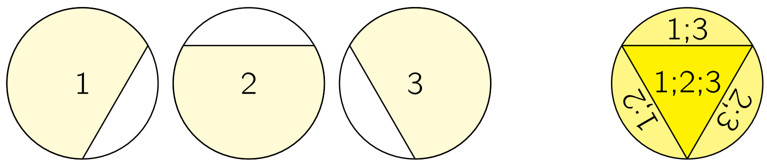
Tatsächlich funktioniert das mit mehr als einem Scheinwerfer immer.

2 Scheinwerfer:



Beide Scheinwerfer leuchten die gesamte Arena aus. Dann ist klar, dass die Arena auch vollständig ausgeleuchtet ist, wenn ein Scheinwerfer ausfällt. Und die Arena bleibt dunkel, wenn beide Scheinwerfer ausfallen.

3 Scheinwerfer:

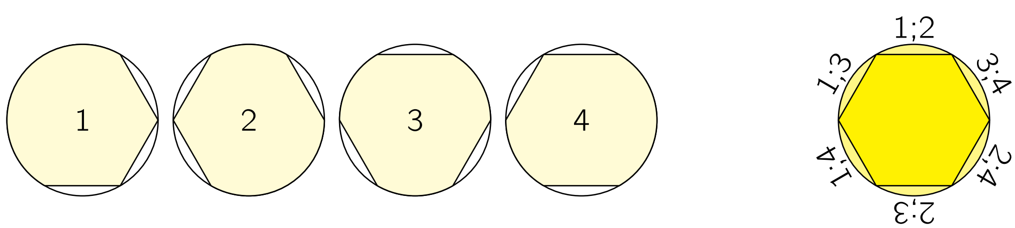


Jeder Punkt der Arena wird von mindestens 2 Scheinwerfern bestrahlt. Also bleibt die Arena vollständig ausgeleuchtet, wenn ein Scheinwerfer ausfällt. Außerdem gibt es zu jedem Scheinwerferpaar, (1;2), (1;3) und (2;3), ein Gebiet, das genau von diesen beiden Scheinwerfern bestrahlt wird. Das heißt, wenn zwei Scheinwerfer ausfallen (egal welche), bleibt das entsprechende Gebiet dunkel.

n Scheinwerfer: Wir verallgemeinern den vorherigen Aufbau für beliebig viele Scheinwerfer. Dafür überlegen wir uns als erstes, wie viele Scheinwerferpaare es gibt. Bei 3 waren es 3, bei 4 sind es 6 und bei 10 sind es schon 45.

Für n Scheinwerfer gibt es genau $m := \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Scheinwerferpaare.

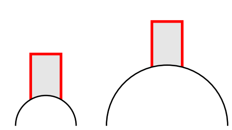
Nun denken wir uns ein m-Eck, dessen Ecken auf dem Rand der Arena liegen. Dann ordnen wir jedem so entstandenen Kreissegment ein Scheinwerferpaar zu. Jeden Scheinwerfer lassen wir das gesamte m-Eck beleuchten und zusätzlich diejenigen Kreissegmente, bei denen der Scheinwerfer im zugeordneten Scheinwerferpaar vorkommt. Für 4 Scheinwerfer sieht das zum Beispiel so aus:



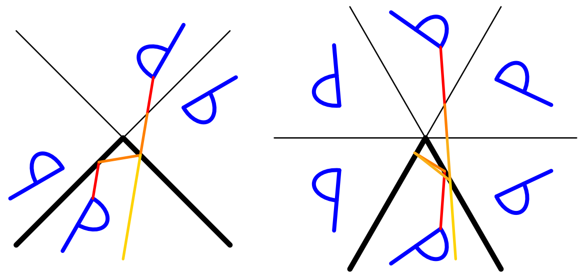
Wie im Fall für 3 Scheinwerfer gilt auch hier, dass jeder Punkt der Arena von mindestens 2 Scheinwerfern bestrahlt wird. Die Arena bleibt also vollständig ausgeleuchtet, wenn ein Scheinwerfer ausfällt. Und es gibt es zu jedem Scheinwerferpaar ein Gebiet, das genau von diesen beiden Scheinwerfern bestrahlt wird. Das heißt, wenn zwei Scheinwerfer ausfallen (egal welche), bleibt das entsprechende Gebiet dunkel.

6 Juni – Luftballons und Plastikbecher

Beim Aufblasen des Luftballons wird seine Oberfläche immer „flacher“. Daher wird der eingeschlossene Raum im Becher größer, aber die eingeschlossene Menge an Luft im Becher bleibt gleich. Somit wird die im Becher eingeschlossene Luft beim Aufblasen des Ballons immer dünner – es entsteht ein Unterdruck. Dadurch „haftet“ der Becher am Luftballon.



7 Juli – Speculum

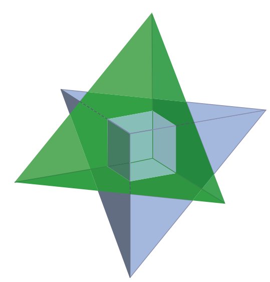


Zur einfacheren Darstellung stellen wir uns den Buchstaben P vor dem Speculum vor und überlegen, wie sein Spiegelbild aussieht. Wir zerlegen den Raum so in 4 Teile (beim 90°-Speculum) bzw. 6 Teile (beim 60°-Speculum), dass je zwei benachbarte Teile an der Verbindung zueinander gespiegelt sind. Die Abbildung zeigt den Weg des Lichtstrahls vom Buchstaben P zum Betrachter (dieser reflektiert an den Spiegeln) und den verlängerten Weg vom Betrachter aus bis zum P im gegenüberliegenden Teil des Raumes. Im Speculum sehen wir genau das, was im gegenüberliegenden Teil des Raumes zu sehen ist.

Wer in ein Speculum mit einem rechten Winkel zwischen den beiden Spiegeln schaut, der sieht also ein „Spiegelbild“, das rechts und links vertauscht – im Gegensatz zu einem „normalen“ Spiegelbild. Wenn dieses Speculum nun gedreht wird, so dreht sich auch das „Spiegelbild“. Wenn zum Beispiel das Speculum um 90 Grad gedreht ist, sieht man sein „Spiegelbild“, bei dem oben und unten vertauscht ist.

Wer in ein Speculum mit einem Winkel von 60 Grad zwischen den beiden Spiegeln schaut, sieht sein ganz normales Spiegelbild. Das ändert sich auch nicht (wie bei einem flachen Spiegel), wenn das Speculum gedreht wird.

8 August – Zwei Pyramiden



Der Teil, der zu beiden Pyramiden gehört, hat die Form eines Würfels.

Wir denken uns einen Würfel in der Ecke eines rechteckigen Raumes. Dazu denken wir uns das kleinste gleichseitige Dreieck, dessen Kanten entlang der Wände verläuft und den Würfel in der Ecke einschließt. Dieses Dreieck zusammen mit den Teilen der Wände, die zwischen Dreieck und Zimmerecke sind, bilden eine Pyramide. Diese Pyramide hat die Eigenschaften aus der Aufgabe: Eine Seitenfläche ist ein gleichseitiges Dreieck und die anderen drei Seitenflächen sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Das gleichseitige Dreieck berührt dabei den Würfel in der vorderen oberen Ecke (vgl. grünen Teil des Bildes).

Zuletzt denken wir uns eine zweite identische Pyramide. Die Spitze soll die vordere obere Ecke des Würfels sein und die angrenzenden Kanten entlang der Würfelkanten verlaufen (vgl. blauen Teil des Bildes).

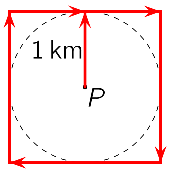
Die beiden Pyramiden liegen nun genauso zueinander, wie es in der Aufgabe beschrieben wird (die Pyramidenspitzen fallen mit dem Mittelpunkt der Grundfläche der anderen Pyramide zusammen und die Grundflächen sind parallel und gegeneinander um 180° gedreht) und ihre Schnittmenge ist der Würfel.

9 September – Zwei Seile

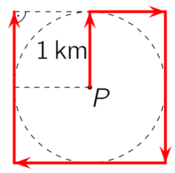
Der Hausmeister klettert an einem Seil hoch. Dann öffnet er den Karabinerhaken am zweiten Seil und zieht es durch die Befestigung an der Decke bis der Ring oben angekommen ist. Dann hängt er sich an das zweite Seil, löst den Karabinerhaken am ersten Seil und befestigt ihn am Ring des zweiten Seils. Anschließend klettert er das (Doppel-)Seil wieder herunter. Unten angekommen kann er am ersten Seil ziehen und damit beide Seile abnehmen.

10 Oktober – Wie findet man aus dem Wald heraus?

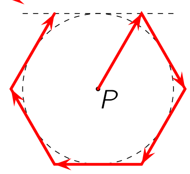
Die Grundidee besteht darin, den Startpunkt P des Pilzsammlers auf geschickte Weise und im Abstand von midestens 1 km (teilweise) zu umrunden. Wir geben verschiedene Wege (und deren Länge in km) an, die aus Strecken und Kreisbögen bestehen, auf denen der Pilzsammler auf jeden Fall an der Straße vorbei kommt.



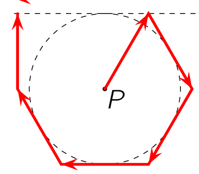
$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$$



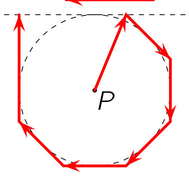
$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$$



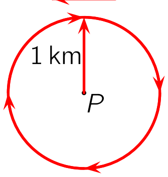
$$6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} < 6{,}93$$



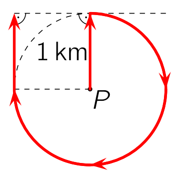
$$5 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 < 6{,}78$$



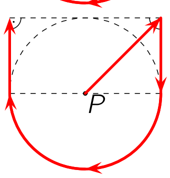
$$\frac{1}{\cos(22{,}5^\circ)} + 11 \cdot \tan(22{,}5^\circ) + 1 < 6{,}64$$



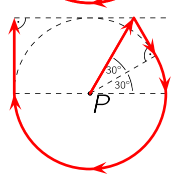
$$1 + 2 \cdot \pi < 7{,}29$$



$$1 + \frac{3}{2} \cdot \pi + 1 < 6{,}72$$



$$\sqrt{2} + 1 + \pi + 1 < 6{,}56$$



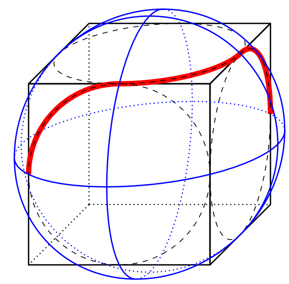
$$\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{7}{6} \cdot \pi + 1 < 6{,}4$$

11 November – Ein langes Laufband

Lena sollte ihre Schnürsenkel auf dem Laufband binden.

Die Zeit, die Lena für das Binden benötigt, seien x Sekunden. Wir teilen Lenas Weg in 3 Abschnitte ein: 1. der Weg abseits des Laufbandes; 2. der Abschnitt des Laufbandes, auf dem sie in beiden Fällen laufen würde; 3. der Abschnitt des Laufbandes, auf dem sie die Schnürsenkel binden würde. Für den 1. und den 2. Teil des Weges benötigt Lena in beiden Fällen die gleiche Zeit. Im Fall „auf dem Laufband binden" benötigt Lena für den 3. Teil genau x Sekunden. Im Fall „nicht auf dem Laufband binden" benötigt Lena für das Binden genau x Sekunden und zusätzlich die Zeit, die sie für den 3. Teil des Weges benötigt. Lena benötigt also weniger Zeit, wenn sie ihre Schnürsenkel auf dem Laufband bindet.

12 Dezember – Würfel oder Kugel?



Clara kann nicht immer erkennen, ob Justus auf dem Würfel oder auf der Kugel zeichnet.

Es gelingt zum Beispiel nicht, wenn der Durchmesser der Kugel genauso groß ist wie die Diagonale einer Seitenfläche des Würfels. Denken wir uns Kugel und Würfel so ineinandergeschoben, dass die Mittelpunkte der beiden derselbe ist, dann besteht die Schnittmenge der beiden Oberflächen aus 6 zusammenhängenden Kreisen, die sich untereinander berühren. Wenn Justus entlang dieser Schnittmenge zwei gegenüberliegende Punkte verbindet, so kann Clara nicht entscheiden, ob Justus auf dem Würfel oder auf der Kugel zeichnet.