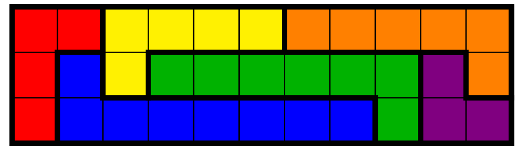
Journal Kvantiks

Rätsel-Kalender 2022

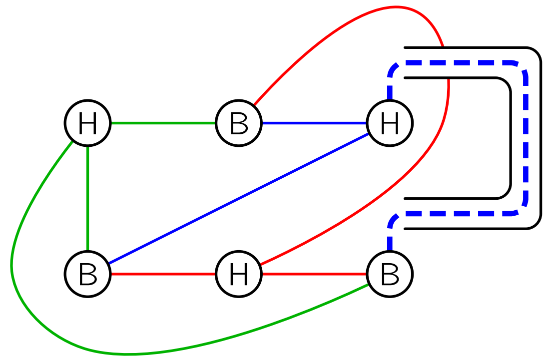
Lösungen

1 Januar – Ein Häppchenpuzzle



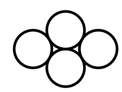
Es sind insgesamt 33 kleine Quadrate. Also muss das Rechteck die Maße 3×11 haben. Rechts ist dargestellt, wie aus diesen Figuren ein Rechteck gelegt werden kann.

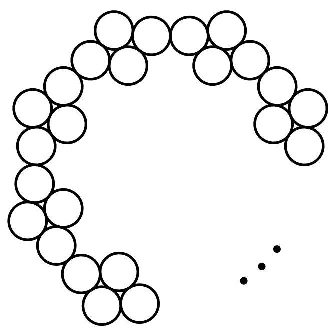
2 Februar – Brunnen und Häuser

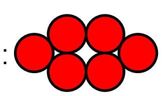
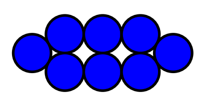


Ohne den Henkel lassen sich 8 der 9 Verbindungen zwischen den 3 Häusern (H) und den 3 Brunnen (B) einzeichnen, die sich nicht kreuzen. Die 9. Verbindungslinie (im Bild gestrichelt dargestellt) lässt sich dann entlang des Henkels einzeichnen.

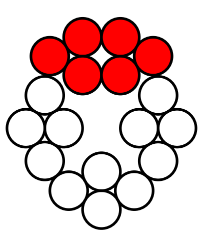
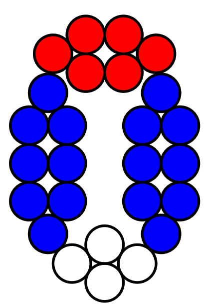
3 März – Münzen mit drei Berührungen

Wie bei der Lösung im Bild legen wir immer 4 Münzen so nebeneinander:  . Dann können wir diese „Blöcke“ kreisförmig anordnen, sodass dann jede Münze genau drei andere berührt. So lassen sich alle Figuren mit 20 Münzen, 24 und allen größeren Vielfachen von 4 legen.



Genauso gut können wir auch aus 6 oder 8 Münzen einen „Block“ legen:   .

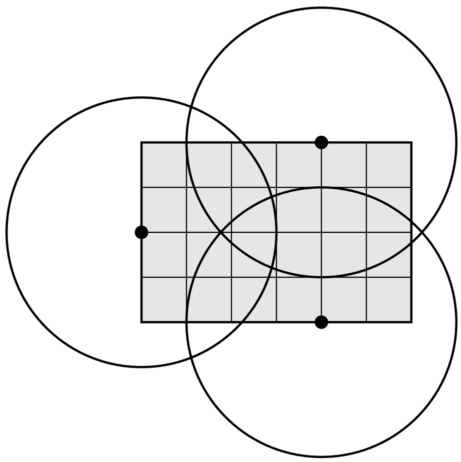
Legen wir diese Blöcke geeignet zusammen, bekommen wir Figuren mit 18 bzw. 26 Münzen.

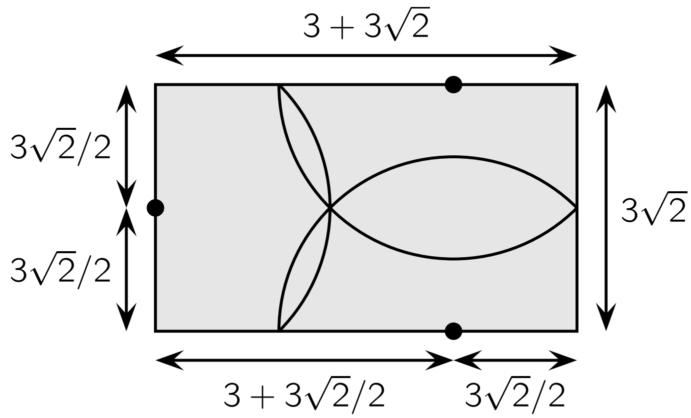
 

4 April – Ein kurzes Kabel

Im linken Bild ist das 4 m mal 6 m grosse Zimmer dargestellt mit einer möglichen Anordnung der drei Steckdosen. Die Kreise geben jeweils an, wie weit das Kabel reicht. So kann das gesamte Zimmer gesaugt werden.

Wir vergrößern das Zimmer, sodass sich die 3 Kreise in einem Punkt schneiden und die anderen Schnittpunkte am Rand des Zimmers liegen. Das rechte Zimmer ist $(3\sqrt{2})$ m mal $(3+3\sqrt{2})$ m gross, also ca. 30,7 m^2.





5 Mai – Ein Spiel mit Kreuzen

Wenn ihr das Spiel mehrmals gespielt habt, werdet ihr das Folgende bemerken können:
Das Spiel mit einem Kreuz am Anfang endet immer nach genau 3 Zügen, ganz egal welche Enden in den einzelnen Zügen verbunden werden. Bei zwei Kreuzen am Anfang endet es immer nach 8 Zügen und bei drei Kreuzen am Anfang immer nach 13 Zügen.
So können wir zu der Vermutung kommen, dass mit jedem weiteren Kreuz am Anfang das Spiel 5 Züge länger dauert, und zwar unabhängig davon, wie gespielt wird. Daraus folgt, dass bei einem Kreuz am Anfang der Startspieler gewinnt, bei zwei Kreuzen am Anfang der zweite Spieler und bei drei Kreuzen am Anfang wieder der Startspieler. Das wechselt sich mit jedem weiteren Kreuz ab. Das bedeutet, dass bei einer ungeraden Anzahl an Kreuzen der Startspieler und bei einer geraden Anzahl an Kreuzen der zweite Spieler gewinnt.

Beweis, dass der Ausgang des Spiels nur von der Anzahl der Kreuze abhängt:
Wir zeigen, dass das Spiel mit k Kreuzen am Anfang immer nach genau $5k-2$ Zügen endet, und zwar unabhängig davon, welche freien Enden jeweils verbunden werden. Um das zu erklären, untersuchen wir bestimmte Eigenschaften der Start- und der Endposition des Spiels und wie diese sich bei einem Zug verändern:

1. **Anzahl der freien Enden:** Zu Beginn gibt es k Kreuze mit insgesamt $4k$ freien Enden. Bei einem Zug werden zuerst 2 freie Enden verbunden und anschließend 2 neue freie Enden hinzugefügt. Also ist die Anzahl der freien Enden nach jedem Zug immer gleich $4k$.

2. **Freie Enden in Gebieten:** Bei einem Zug werden zwei freie Enden durch eine Linie miteinander verbunden und anschließend ein Querstrich auf dieser Linie gezeichnet. Daraus folgt, dass nach einem Zug in jedes Gebiet wieder mindestens ein freies Ende ragt.

3. **Anzahl der Gebiete:** Zu Beginn gibt es genau ein Gebiet (die gesamte Ebene ohne die Kreuze). Bei einem Zug gibt es nun zwei mögliche Fälle.

   (a) Werden zwei freie Enden verbunden, die zum selben Kreuz gehören oder durch andere Linien schon miteinander verbunden sind, so entstehen aus einem Gebiet zwei Gebiete, es wird also ein Gebiet mehr.

   (b) Werden zwei freie Enden verbunden, die noch nicht miteinander verbunden sind, so ändert sich die Anzahl der Gebiete nicht.

   Daraus folgt, dass das Spiel genau dann endet, wenn in jedes Gebiet genau ein freies Ende ragt, also die Anzahl der Gebiete gleich der Anzahl der Enden ist, nämlich gleich $4k$ ist.

4. **Miteinander verbundene Kreuze:** Wir teilen gedanklich alle Kreuze in Gruppen ein: Wenn zwei Kreuze durch Linien miteinander verbunden sind, gehören sie zur selben Gruppe, ansonsten zu verschiedenen. Zu Beginn gibt es genau k Kreuze und keine Linien, also gibt es k Gruppen.

   (a) Werden zwei freie Enden verbunden, die zum selben Kreuz gehören oder durch andere Linien schon miteinander verbunden sind, so ändert sich die Anzahl der Gruppen nicht.

   (b) Werden zwei freie Enden verbunden, die noch nicht miteinander verbunden sind, so wird die Anzahl der Gruppen um eins kleiner.

   Am Ende des Spiels sind alle Kreuze miteinander verbunden, also gibt es dann eine Gruppe.

Nun müssen wir nur noch die Anzahl der Züge zählen. Züge vom Typ (a) gibt es wegen (3.) genau $4k-1$, da die Anzahl der Gebiete am Anfang 1 und am Ende $4k$ ist. Züge vom Typ (b) gibt es wegen (4.) genau $k-1$, da es zu Beginn k und am Ende 1 Gruppe gibt. Insgesamt gibt es demzufolge $(4k-1)+(k-1)=5k-2$ Züge.

6 Juni – Paradoxes beim Wettrennen

Wir nähern uns dem Paradoxon als Erstes mit einem Beispiel: Wir untersuchen ein Wettrennen über 10.000 Meter mit 3 Läufern. Der 1. Läufer habe eine Geschwindigkeit von $4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und die anderen beiden Läufer eine Geschwindigkeit von $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Die Durchnittsgeschwindigkeit der 3 Läufer beträgt $\dfrac{4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3}=\dfrac{6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3}=2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Der 1. Läufer benötigt für das Rennen $\dfrac{10.000\,\mathrm{m}}{4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=2.500\,\mathrm{s}$ und die anderen beiden Läufer jeweils $\dfrac{10.000\,\mathrm{m}}{1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=10.000\,\mathrm{s}$. Durchschnittlich benötigen sie also $\dfrac{2.500\,\mathrm{s}+10.000\,\mathrm{s}+10.000\,\mathrm{s}}{3}=7.500\,\mathrm{s}$.

Das Ergebnis ist somit ungleich $\dfrac{10.000\,\mathrm{m}}{2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=5.000\,\mathrm{s}$.

Das liegt daran, dass das Ergebnis des Ausdrucks $\dfrac{10.000\,\mathrm{m}}{2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$, also dem Quotienten aus der Länge der Strecke und der Durchnittsgeschwindigkeit aller Läufer, nicht das *arithmetische Mittel* (also der Durchschnitt) der einzelnen Zeiten aller Läufer, sondern das sogenannte *harmonische Mittel* der einzelnen Zeiten aller Läufer ist. Dieses harmonische Mittel ist übrigens immer kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.

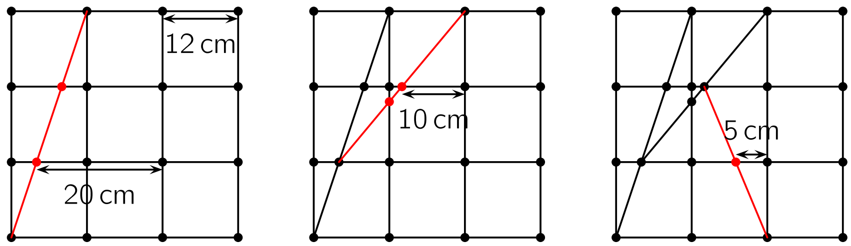
7 Juli – Supergalaktischer Altersfinder

Die Anzahl der Sterne auf den einzelnen Bildschirmen sind 1, 2, 4, 8 und 16. Wenn man eine Zahl als Summe von einigen (verschiedenen) dieser Zahlen schreiben kann, so muss man lediglich diese Zahl auf jedem der entsprechenden Bildschirme anzeigen. Die Zahl $2 + 4 + 16 = 22$ steht somit auf den Bildschirmen mit 2, 4 und 16 Sternen.

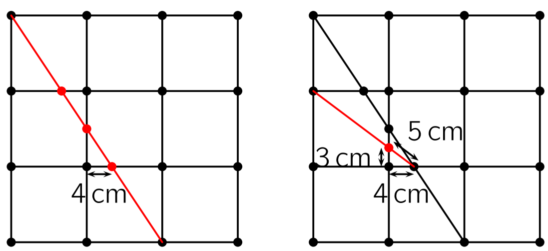
Das besondere an den Zahlen 1, 2, 4, 8 und 16 ist, dass sich mit diesen jede Zahl von 1 bis 31 auf eindeutige Weise als Summe (oder als eine dieser Zahlen) schreiben lässt. Zahlen als Summe von Zweierpotenzen zu schreiben, wird auch als Binär- oder Dual-darstellung bezeichnet.

8 August – Nägel und Zwirn

Es gibt viele Möglichkeiten mit drei Schnüren den Abstand 5 cm zu erhalten. Ein Weg ist dieser:



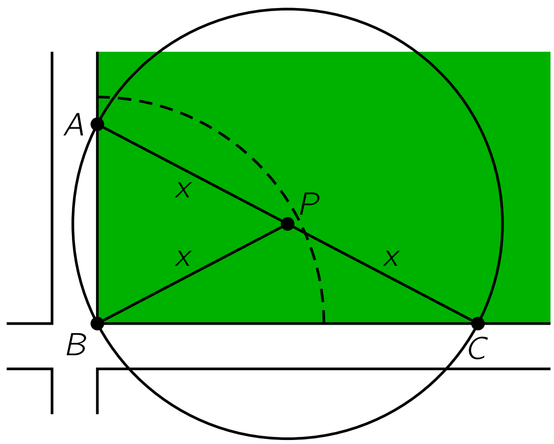
Und es reichen sogar zwei Schnüre aus:



9 September – Wer findet aus dem Wald?

Vasili startet in eine beliebige Richtung und läuft immer genau geradeaus. Wenn er nach 2 Kilometern noch keine Straße erreicht hat, dann dreht er um und läuft in die genau umgedrehte Richtung weiter. Dann erreicht er eine der beiden Straßen nach maximal weiteren 4 Kilometern.

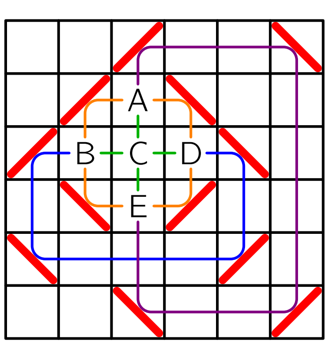
Der Abstand von der aktuellen Position (P) zur Kreuzung (B) ist $x \leq 2\,\text{km}$. Der Kreis um P mit Radius x schneidet die Grenze zwischen Wald und Straße desweiteren in A und C. Wir zeigen nun, dass AC ein Durchmesser des Kreises ist. Der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABP sei α und der im gleichschenkligen Dreieck BCP gleich β. Dann ist $\alpha + \beta = \measuredangle CBA = 90°$. Folglich ist $\measuredangle APC = \measuredangle APB + \measuredangle BPC = (180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) = 180°$, das heißt P liegt auf der Geraden AC.
Geht Vasili also entlang der Geraden AC oder in die Richtung unterhalb dieser Geraden, kommt er nach spätestens $x \leq 2\,\text{km}$ Weg an einer Straße an. Geht er stattdessen in die Richtung oberhalb dieser Geraden, läuft er $2\,\text{km}$ und dreht dann um. Nach weiteren $2\,\text{km}$ ist er dann wieder am Punkt P; und nach maximal $x \leq 2\,\text{km}$ Weg kommt er an einer Straße an. Auf diese Weise kommt er nach insgesamt $2\,\text{km} + 2\,\text{km} + x \leq 6\,\text{km}$ an einer Straße an.

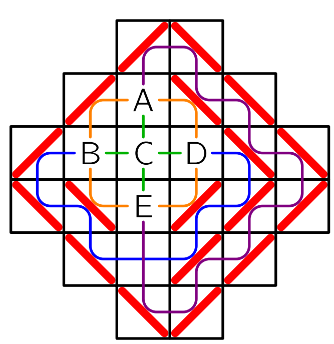


10 Oktober – Rätsel im Spiegelkabinett

Auf einem 5×5-Feld geht das nicht. Auf einem 6×6-Feld gibt es mehrere Möglichkeiten, eine ist in der linken Abbildung dargestellt. Wenn wir diese Aufstellung etwas abwandeln und dabei ausnutzen, dass Spiegel auf beiden Seiten einer Wand sein können, reichen sogar 24 Felder.

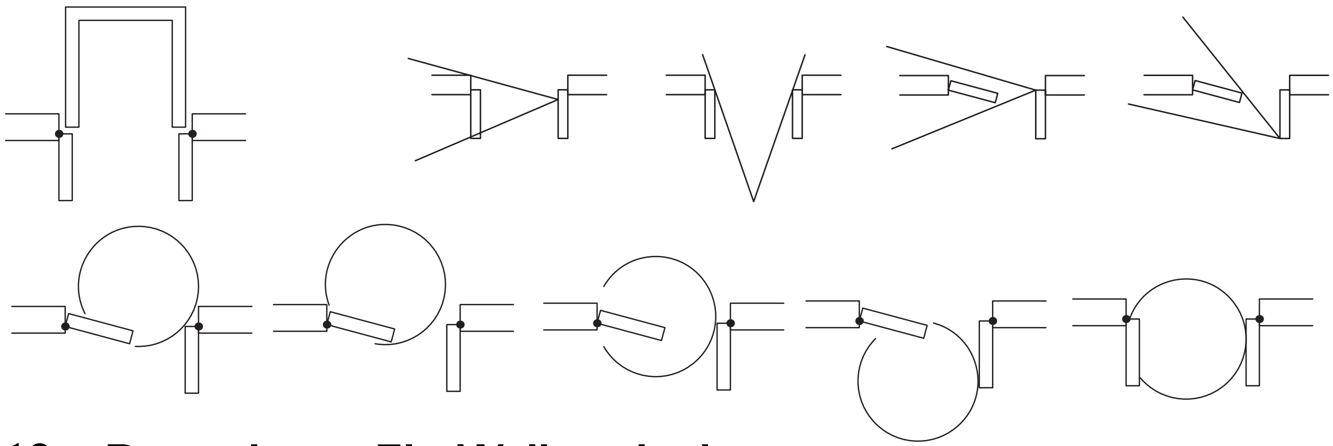
In den Abbildungen sind die Spiegel rot dargestellt. Die anderen Linien zeigen, wie die Kinder an den Spiegeln reflektiert werden.



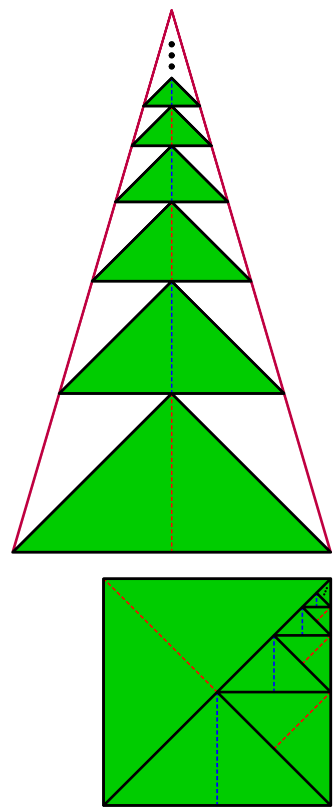


11 November – Sperrige Möbel

Ein Möbelstück, das um das halboffene Fenster herum rausgedreht werden kann aber nicht durch das offene Fenster passt, muss eine sehr spezielle Form haben. Hier sind einige Beispiele, bei der die Bewegungen bzw. das Nichtdurchpassen angedeutet sind:



12 Dezember – Ein Weihnachtsbaum



Jedes Baum-Dreieck ist halb so groß wie das Baum-Dreieck direkt darunter. Also liegen alle Baum-Dreiecke im lilafarbenen Dreieck, das durch die verlängerten Verbindungsstrecken der unteren linken Ecken der ersten beiden Baum-Dreiecke entsteht. Nun können wir mit einem Lineal messen, wie hoch der Baum ungefähr werden kann. Der Baum wird ungefähr 2,41-mal so groß wie die Seitenlänge der quadratischen Holzplatte, aus der Kvantik den Baum baut.

Genau berechnen lässt sich das wie folgt: Wir zeichnen auf der quadratischen Holzplatte die Sägelinien ein. Dann zeichnen wir die Höhen der Dreiecke ein, und zwar abwechselnd rot und blau. Nun lässt sich erkennen, dass die blauen Höhen zusammen genauso lang wie eine Quadratseite sind. Die erste rote Höhe ist halb so lang wie eine Diagonale des Quadrats und die anderen roten Höhen zusammen sind ebenfalls halb so lang wie eine Diagonale des Quadrats. Somit sind die roten Höhen zusammen genauso lang wie eine Diagonale des Quadrats. Im fertigen Baum ist die Summe der Längen der einzelnen Höhen (blau und rot) genau die Höhe des Baumes. Wenn die Seitenlänge gleich 1 m wäre, so würde der fertige Baum eine Höhe von $1\,\mathrm{m} + \sqrt{2}\,\mathrm{m} \approx 2{,}41\,\mathrm{m}$ haben.

Eine weitere Lösungsvariante besteht darin, die einzelnen Höhen der Baum-Dreiecke zu addieren. Die Kantenlänge des Quadrats sei 1. Die Höhe des 1. Baum-Dreiecks ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Höhe der anderen Baum-Dreiecke sind jeweils $\frac{1}{\sqrt{2}}$-mal so groß wie die Höhe des direkt darunter liegenden Baum-Dreiecks. Die Gesamthöhe des Baumes ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$