Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2023“ für die Klassenstufen 7 bis 13

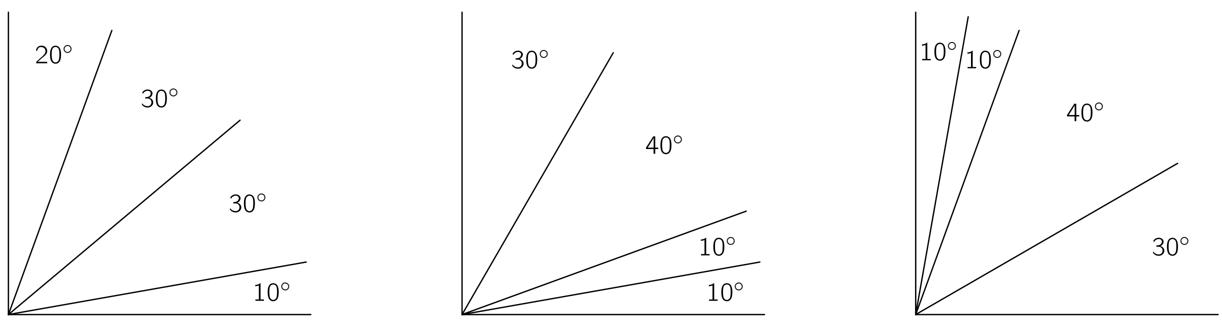
Seite 6: Von der ersten zur zweiten Zahl wechseln die Ziffern an der Zehner- und an der Einerstelle. Somit endet die erste Zahl auf 00, die zweite auf 99 und die dritte auf 98. Also gilt $\diamondsuit = 0$, $\triangle = 9$ sowie $\square = 8$. Die erste Zahl ist also 800. Folglich ist die zweite Zahl 799, die dritte 798 und die gesuchte, nächstkleinere Zahl 797. Somit ist $\heartsuit = 7$, und die 797 ist in Symbolen geschrieben $\heartsuit\triangle\heartsuit$. Die Zahl ist eine andere, aber die Schreibweise mit den Symbolen ist dieselbe wie in der Aufgabe 13.

Die Aufgabe lässt sich auch lösen, ohne die Ziffern zu finden. Da die zweite Zahl um 1 kleiner ist als die erste, muss $\heartsuit$ um 1 kleiner sein als $\square$. Also ist $\heartsuit\triangle\heartsuit$ um 1 kleiner als $\heartsuit\triangle\square$ und damit die gesuchte Zahl.

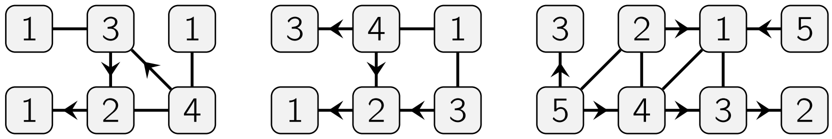
Seite 10: Da die Summe der drei natürlichen Zahlen 12 ist, sind sie alle kleiner oder gleich 12. Nun zerlegen wir 48 in Primfaktoren: $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Somit kommen nur die folgenden Faktoren in Frage: $12 \cdot 4 \cdot 1$, $12 \cdot 2 \cdot 2$, $8 \cdot 6 \cdot 1$, $8 \cdot 3 \cdot 2$, $6 \cdot 4 \cdot 2$, $4 \cdot 4 \cdot 3$. Da nur bei den Zahlen 6, 4, 2 gleichzeitig auch die Summe gleich 12, sind das die gesuchten drei Zahlen.

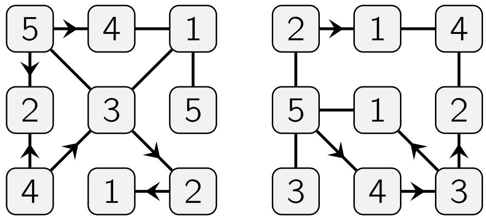
Seite 11: Das Produkt der Zahlen von 1 bis 2023 wird kurz 2023! geschrieben (gesprochen als „2023 Fakultät“). Um herauszufinden, auf wie viele Nullen die Zahl 2023! endet, müssen wir berechnen, wie oft sie durch 10 teilbar ist. Und das tun wir, indem wir berechnen, wie oft 2023! durch 2 und durch 5 teilbar ist.
Jeder 5. der 2023 Faktoren ist durch 5 teilbar. Wegen $2023 : 5 = 404$ Rest 3, ist 2023! damit bereits 404-mal durch 5 teilbar. Jeder 25. Faktor ist durch 25, also 5^2 teilbar, diese Faktoren liefern jeweils eine weitere 5, durch die 2023! teilbar ist. Wegen $2023 : 25 = 80$ Rest 23, ergibt das 80 weitere 5en. Jeder 125. Faktor ist durch 125, also 5^3 teilbar, diese Faktoren liefern jeweils eine weitere 5, durch die 2023! teilbar ist. Wegen $2023 : 125 = 16$ Rest 23, ergibt das 16 weitere 5en. Jeder 625. Faktor ist durch 625, also 5^4 teilbar, diese Faktoren liefern jeweils eine weitere 5, durch die 2023! teilbar ist. Wegen $2023 : 625 = 3$ Rest 148, ergibt das 3 weitere 5en. Da keiner der Faktoren durch $5^5 = 3125$ teibar ist, sind wir nun fertig und zählen zusammen: Die Zahl 2023! ist durch $5^{404+80+16+3} = 5^{503}$ teilbar, aber nicht durch 5^{504}.
Da jeder zweite der 2023 Faktoren durch 2 teilbar ist, ist 2023! durch 2^{1011} teilbar.
Da 1011 größer als 503 ist, müssen wir nicht weiter zählen, 2023! ist also durch 10^{503} teilbar, aber nicht durch 10^{504}, und endet daher auf 503 Nullen.

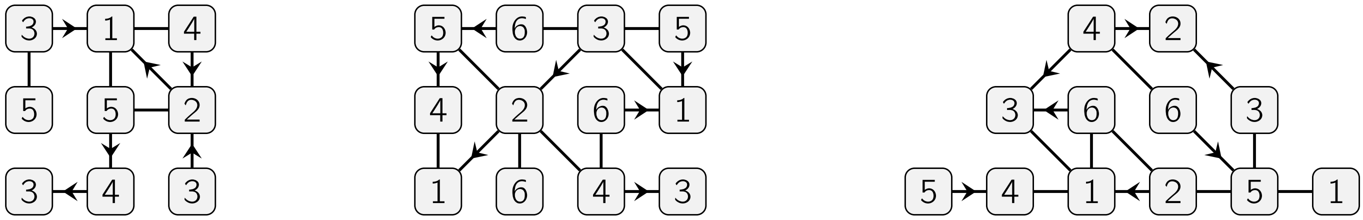
Seite 12: Die drei anderen Möglichkeiten sind



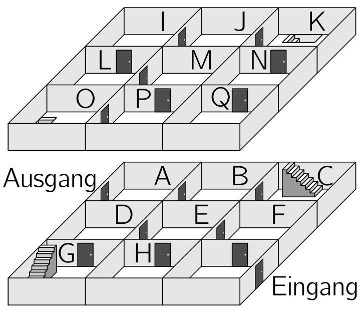
<u>*Seite 13*</u>: Die Lösungen der Paare-Rätsel sind:







<u>*Seite 14*</u>:



Der Weg vom Eingang zum Ausgang startet mit dem Zimmer hinter der Eingangstür und geht dann durch die Räume F, E, D, G, O, P, M, L, I, J, K, C, B, A.

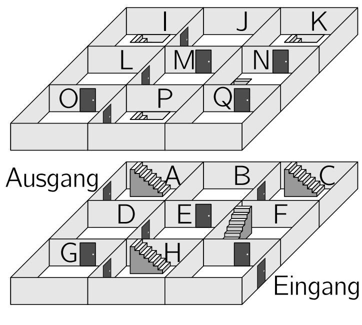
Wenn Tina das erste Mal den Raum I betritt, dann kann sie noch nicht wissen, wie der Weg zum Ausgang verläuft: Neben dem richtigen Weg J, K, C, B, A könnte der Weg auch J, B, A sein.

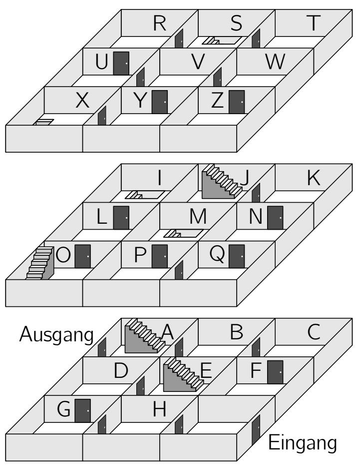
Erst wenn Tina den Raum J betritt, kann sie sicher sein, dass der restliche Weg zum Ausgang durch die Räume K, C, B, A verläuft.

Der Weg vom Eingang zum Ausgang startet mit dem Zimmer hinter der Eingangstür und geht dann durch die Räume F, N, K, C, B, E, D, G, H, P, O, L, M, J, I, A.

Wenn Tina das erste Mal den Raum O betritt, dann kann sie noch nicht wissen, wie der Weg zum Ausgang verläuft: Neben dem richtigen Weg L, M, J, I, A könnte der Weg auch L, I, A sein.

Erst wenn Tina den Raum L betritt, kann sie sicher sein, dass der restliche Weg zum Ausgang durch die Räume M, J, I, A verläuft.





Der Weg vom Eingang zum Ausgang startet mit dem Zimmer hinter der Eingangstür und geht dann durch die Räume H, G, D, E, M, P, Q, N, K, J, S, R, U, V, Y, X, O, L, I, A.

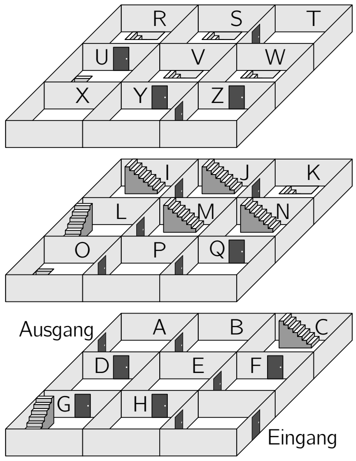
Wenn Tina das erste Mal den Raum U betritt, dann kann sie noch nicht wissen, wie der Weg zum Ausgang verläuft: Neben dem richtigen Weg V, Y, X, O, L, I, A könnte der Weg auch V, W, Z, Y, X, O, L, I, A sein.

Erst wenn Tina den Raum V betritt, kann sie sicher sein, dass der restliche Weg zum Ausgang durch die Räume Y, X, O, L, I, A verläuft.

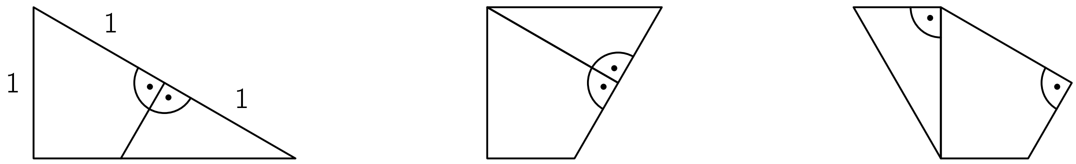
Der Weg vom Eingang zum Ausgang startet mit dem Zimmer hinter der Eingangstür und geht dann durch die Räume H, E, F, C, K, J, I, R, U, L, M, V, Y, Z, W, N, Q, P, O, G, D, A

Wenn Tina das erste Mal den Raum Y betritt, dann kann sie noch nicht wissen, wie der Weg zum Ausgang verläuft: Neben dem richtigen Weg Z, W, N, Q, P, O, G, D, A könnte der Weg auch Z, Q, P, O, G, D, A sein.

Erst wenn Tina den Raum Z betritt, kann sie sicher sein, dass der restliche Weg zum Ausgang durch die Räume W, N, Q, P, O, G, D, A verläuft.



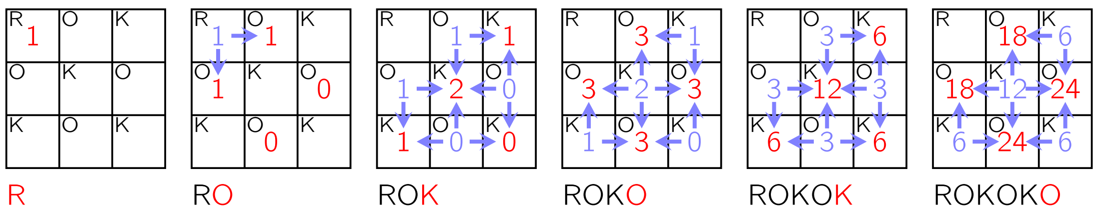
<u>*Seite 17*</u>: Es gibt mehrere Möglichkeiten, wir zeigen ein Beispiel. Wir zerteilen ein halbes gleichseitiges Dreieck wie abgebildet in zwei Teile. Aus diesen lassen sich dann auch ein konvexes Viereck und ein konvexes Fünfeck legen.



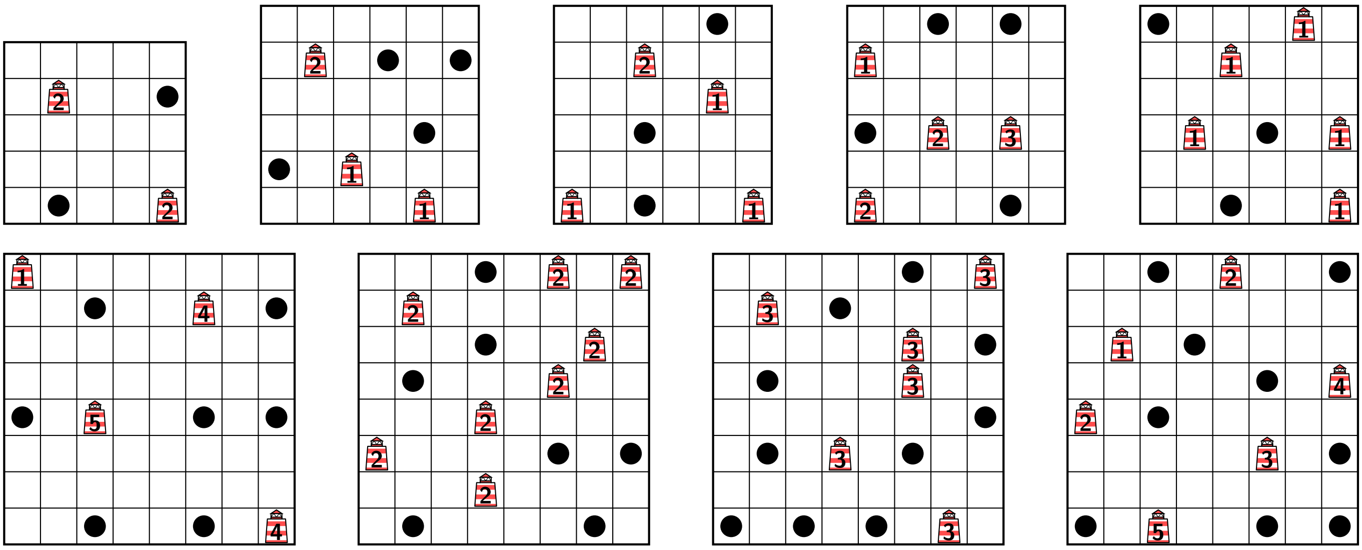
<u>*Seite 19*</u>: Die eindeutige Lösung ist $793 + 793 + 793 = 2379$.

<u>*Seite 20*</u>: Da die Figur symmetrisch ist, sind die beiden kleinen Vierecke zueinander kongruent, und ebenso sind die beiden großen Vierecke zueinander kongruent. Also ist der Flächeninhalt der weißen Vierecke genauso groß wie der Flächeninhalt der grauen Vierecke. Der Flächeninhalt des großen Sechsecks ist also genauso groß wie die Summe aus dem Flächeninhalt des kleinen Sechsecks und zwei Mal dem Flächeninhalt der grauen Fläche. Folglich steht der Flächeninhalt des kleinen Sechsecks zum Flächeninhalt des großen Sechsecks im Verhältnis $4 : (4 + 3 + 3) = 4 : 10 = 2 : 5$.

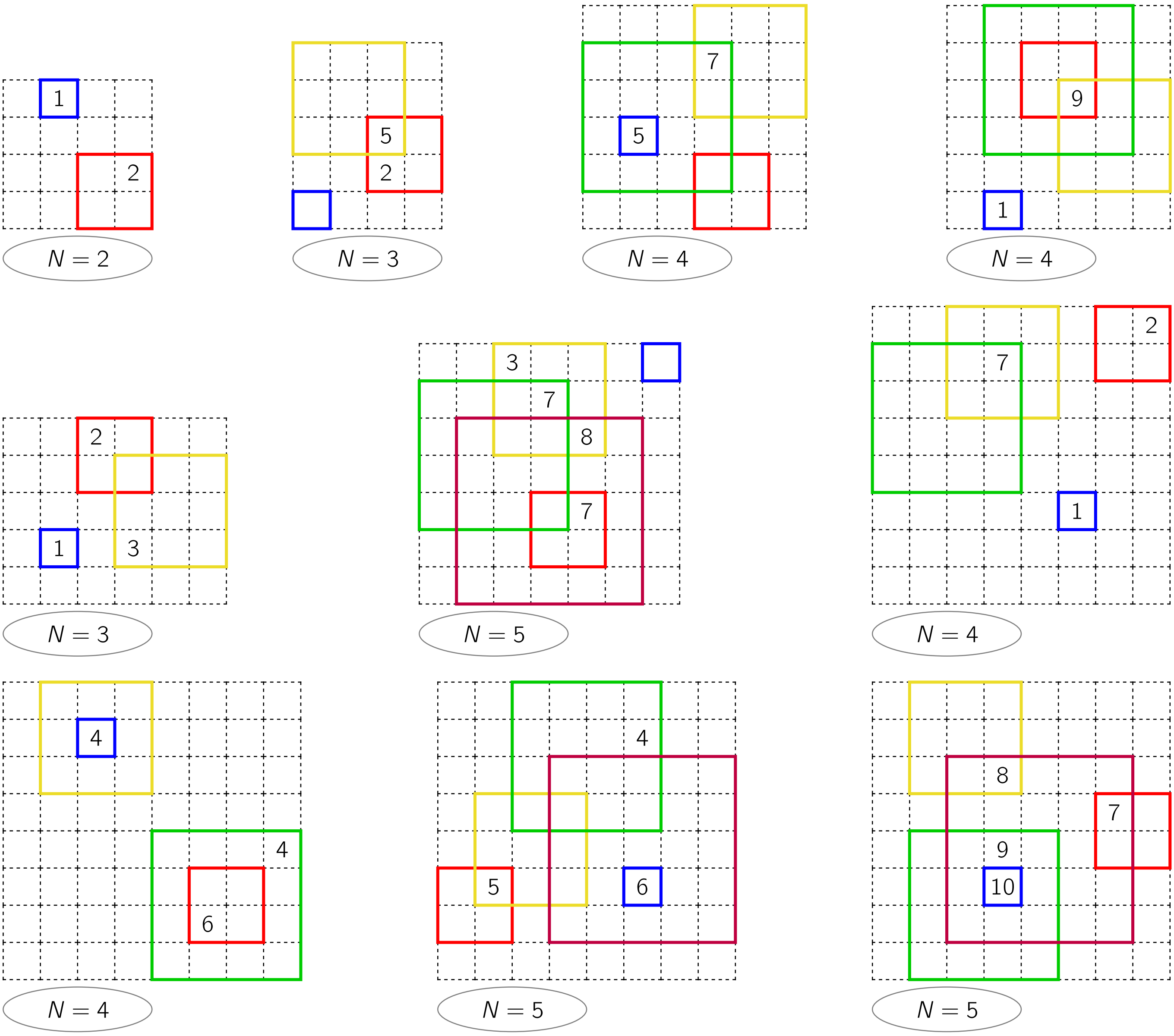
<u>*Seite 21*</u>: Wir betrachten buchstabenweise, auf wie viele Weisen sich das Wort ROKOKO bis dahin lesen lassen kann. Wir starten beim einzigen R in der Abbildung auf die einzige mögliche Weise. Als Nächstes zählen wir für jedes Feld mit einem O, auf wie vielen Wegen dieses Feld erreicht werden kann. Das O oben und das O links können vom R aus auf jeweils eine Weise erreicht werden, die anderen beiden O's nicht. Im nächsten Schritt zählen wir für jedes Feld mit einem K, auf wie vielen Wegen dieses Feld erreicht werden kann. Dafür addieren wir alle Zahlen in den benachbarten Feldern mit einem O, die wir im letzten Schritt notiert haben. So fahren wir fort. Insgesamt gibt es $18 + 18 + 24 + 24 = 84$ Wege.



Seite 24: Die Lösungen der Leuchttürme-Rätsel sind:



Seite 25: Die Lösungen der Überlappende-Quadrate-Rätsel sind:



Seite 28: Um die 3 an der Einerstelle von 2023 zu erhalten, muss an der Einerstelle von y eine 1 stehen. Weil $2023 : 23 = 87$ Rest 22 ist, muss y kleiner als 87 sein.
Wenn an der Einerstelle von $2023 - 23y$ eine 0 bleibt und an der Zehnerstelle eine gerade Ziffer, so ist diese Zahl durch 20 teilbar und wir können genau eine natürliche Zahl x finden, sodass die Gleichung erfüllt ist (nämlich $(2023 - 23y) : 20$). Dies ist genau für y gleich 1, 21, 41, 61 oder 81 der Fall. Es gibt also 5 Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit $20x + 23y = 2023$, und zwar $(100, 1)$, $(77, 21)$, $(54, 41)$, $(31, 61)$, $(8, 81)$.

Seite 29: Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine davon ist $138 + 920 + 407 = 1465$.