Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2022“ für die Klassenstufen 7 bis 13

<u>*Seite 3*</u>: Eine Möglichkeit lautet $906 + 841 + 275 = 2022$.

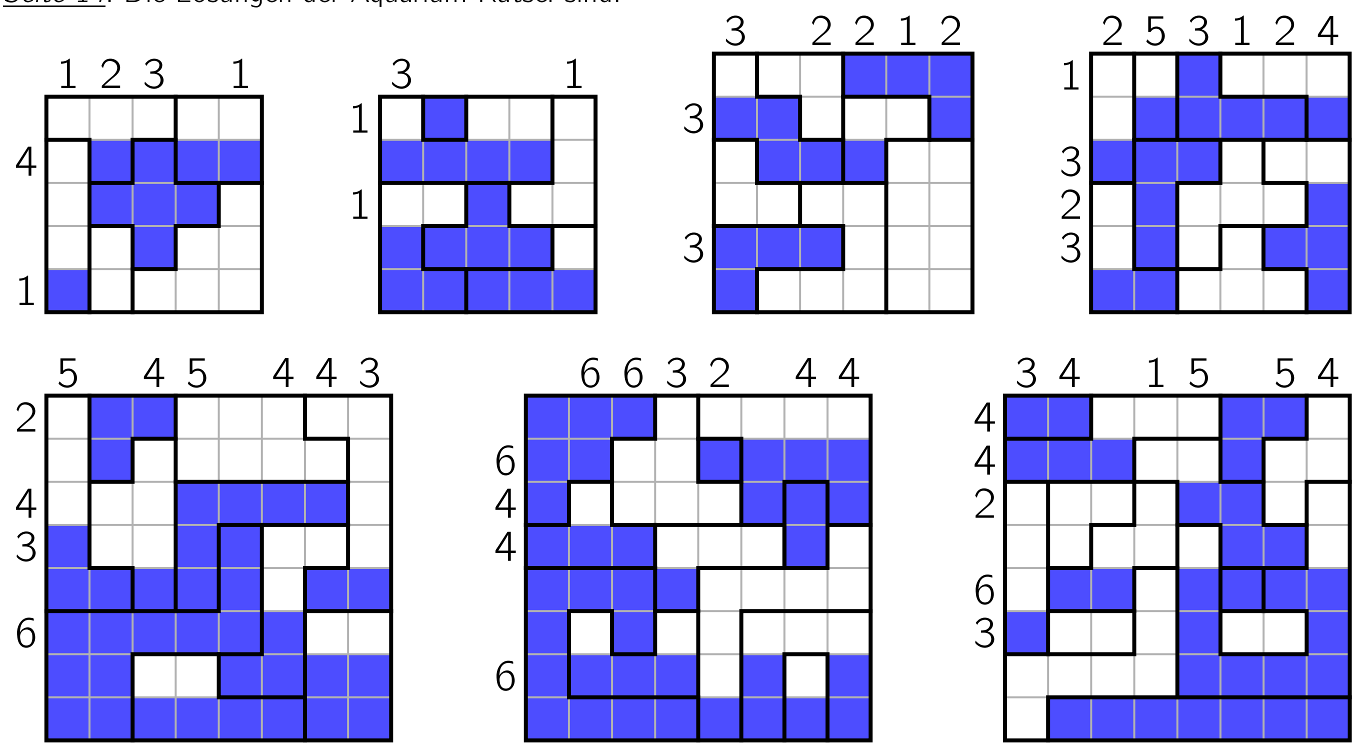
<u>*Seite 8*</u>: Wie bereits in der Lösung der Aufgabe 21 geschrieben wurde: Der Unterschied der angezeigten Uhrzeiten wächst pro Stunde um 3 Minuten, und sie wurden gestern um 16:40 richtig gestellt.

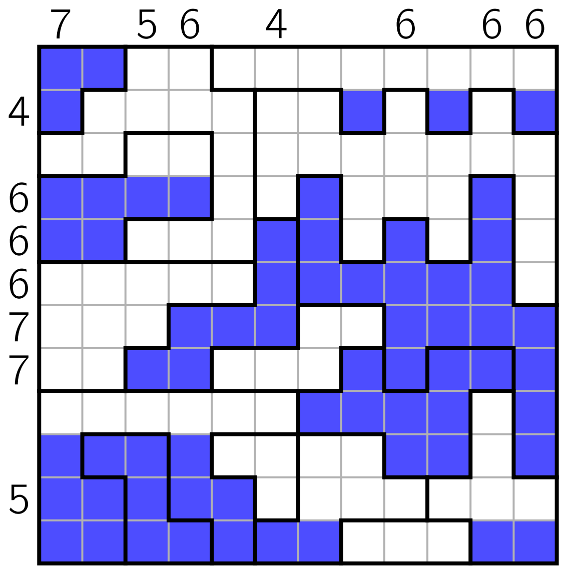
Die beiden Uhren zeigen das nächste Mal dieselbe Uhrzeit, wenn der Unterschied der angezeigten Uhrzeiten 24 Stunden, also $24 \cdot 60 = 1440$ Minuten beträgt. Das wird $1440 : 3 = 480$ Stunden bzw. $480 : 24 = 20$ Tage nach dem Stellen der beiden Uhren sein, also in 19 Tagen um 16:40.

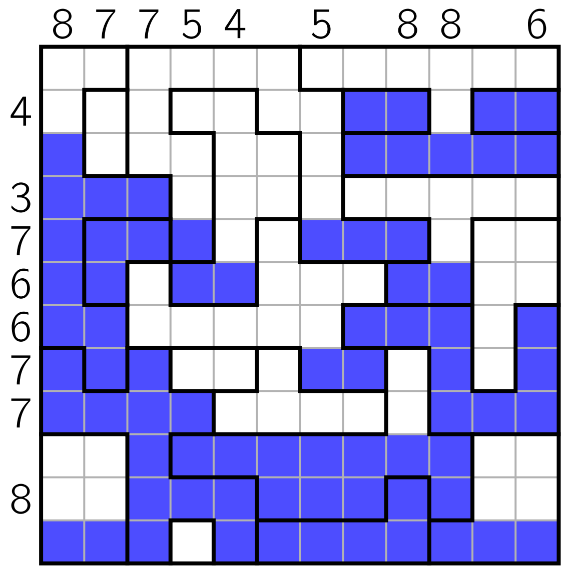
Da die Uhr in Vordorf jede Stunde um 1 Minute vorgeht, zeigt sie das nächste Mal nach $24 \cdot 60 = 1440$ Stunden die richtige Uhrzeit an. Das ist also genau 60 Tage nach dem Stellen der beiden Uhren. Zu diesem Zeitpunkt zeigt auch die Uhr in Nachburg die richtige Uhrzeit an (und zwar zum 2. Mal seit dem Stellen).

<u>*Seite 9*</u>: Die Anzahl der Punkte sind nach dem 1. Schritt $2n-1$, nach dem 2. Schritt $2(2n-1)-1 = 4n-3$, nach dem 3. Schritt $2(4n-3)-1 = 8n-7$ und nach dem 4. Schritt $2(8n-7)-1 = 16n-15$. In jedem Schritt verdoppelt sich der Faktor vor dem n. Da er nach dem 1. Schritt gleich 2 ist, ist er nach k Schritten genau 2^k. Die Zahl, die abgezogen wird, ist nach den ersten Schritten immer um 1 kleiner als der Faktor vor dem n. Und das bleibt auch so, da $2(2^k n - (2^k - 1)) - 1 = 2^{k+1} n - (2^{k+1} - 1)$. Daher gibt es ganz allgemein nach k Schritten $2^k n - (2^k - 1)$ Punkte. Nach dem 6. Schritt sind es also $2^6 n - (2^6 - 1) = 64n - 63$ Punkte und nach dem 9. Schritt $2^9 n - (2^9 - 1) = 512n - 511$.

<u>*Seite 14*</u>: Die Lösungen der Aquarium-Rätsel sind:

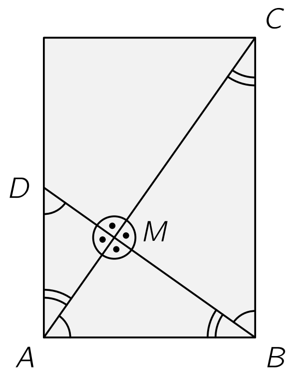






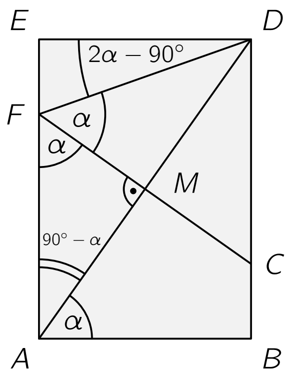
<u>*Seite 17*</u>: Die anderen zweistelligen Zahlen, bei denen das so ist, sind neben der 11 ($11^2 = 121$) und der 22 ($22^2 = 484$) nur noch die 13 und die 31 ($13^2 = 169$, $31^2 = 961$).

<u>*Seite 24*</u>: $\boxed{1}$ Die Diagonale wird tatsächlich von der zweiten Faltlinie gedrittelt, und ebenso wird die zweite Faltlinie durch die Diagonale gedrittelt. Das können wir so beweisen: Es sei M der Schnittpunkt der beiden Faltlinien. Die zweite Faltlinie ist genau die Mittelsenkrechte der Strecke von der linken unteren Ecke und dem Punkt, zu dem die Ecke gefaltet wurde. Deswegen sind die vier Winkel bei M alle rechte Winkel. Die Winkel, die im Bild rechts mit einem bzw. zwei Kreisbögen markiert sind, sind jeweils gleich groß. Das liegt daran, dass das Blatt rechteckig ist, also an den Ecken A und B der Winkel 90° ist, und dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt:

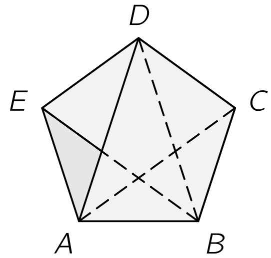


$$\begin{aligned}
&\measuredangle MAD + \measuredangle BAM = 90^\circ \\
&\measuredangle MBA + \measuredangle CBM = 90^\circ \\
&\measuredangle ADM + \measuredangle MAD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \\
&\measuredangle BAM + \measuredangle MBA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \\
&\measuredangle CBM + \measuredangle MCB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \\
\Longrightarrow\quad &\measuredangle ADM = 90^\circ - \measuredangle MAD = \measuredangle BAM = 90^\circ - \measuredangle MBA = \measuredangle CBM \\
\text{und}\quad &\measuredangle MAD = 90^\circ - \measuredangle BAM = \measuredangle MBA = 90^\circ - \measuredangle CBM = \measuredangle MCB
\end{aligned}$$

Demzufolge sind die Dreiecke DAM, ABM und BCM ähnlich zueinander. Daraus folgt $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|BM|}{|BC|}$ und $\frac{|BM|}{|AB|} = \frac{|CM|}{|BC|}$. Das Seitenverhältnis bei einem A4-Blatt ist genau $\sqrt{2}$, also gilt $|BC| = \sqrt{2} \cdot |AB|$. Folglich ergibt sich $|CM| = \frac{|BM|}{|AB|} \cdot |BC| = |BM| \cdot \sqrt{2} = \frac{|AM|}{|AB|} \cdot |BC| \cdot \sqrt{2} = |AM| \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2|AM|$. Also wird die Diagonale von der zweiten Faltlinie gedrittelt. Aus $\frac{|DM|}{|AM|} = \frac{|BM|}{|CM|}$ folgt dann direkt $|BM| = 2|DM|$. Also wird die zweite Faltlinie durch die Diagonale gedrittelt.



$\boxed{2}$ Schon durch Messen der Seitenlängen mit einem Lineal fällt auf, dass die Seiten nicht alle gleich lang sind. Wir vermuten also, dass so kein regelmäßiges Fünfeck entsteht. Um das zu beweisen, berechnen wir den oberen Innenwinkel: Dieser Winkel setzt sich aus dem Winkel $\measuredangle EDF$ und dem 90°-Winkel $\measuredangle BAF$ zusammen. Wir müssen also $\measuredangle EDF$ berechnen. Durch das Falten entstehen bei M vier rechte Winkel. Die Größe des Winkels $\measuredangle BAM$ bezeichnen wir mit α. Da das Seitenverhältnis bei einem A4-Blatt $\sqrt{2}$ ist, gilt $\alpha = \measuredangle BAM = \measuredangle BAD = \arctan \frac{|BD|}{|AB|} = \arctan \sqrt{2}$. Wegen $\measuredangle BAM + \measuredangle MAF = 90° = \measuredangle MAF + \measuredangle AFM$ gilt $\measuredangle AFM = \alpha$. Da $\overline{FC}$ die zweite Faltlinie ist und dabei A auf D gefaltet wurde, ist $\measuredangle MFD = \measuredangle AFM = \alpha$. Damit ergibt sich $\measuredangle DFE = 180° - 2\alpha$ und $\measuredangle EDF = 2\alpha - 90°$. Der obere Winkel in dem gefalteten Fünfeck ist also $2\alpha - 90° + 90° = 2 \arctan \sqrt{2} \approx 2 \cdot 54{,}7° = 109{,}4°$. Die Innenwinkel in einem regelmäßiges Fünfeck sind aber gleich 108°.



$\boxed{3}$ In diesem Fall entsteht wirklich ein regelmäßiges Fünfeck. Da der Streifen rechteckig war, sind die folgenden Strecken parallel zueinander:

$$\overline{AC} \,||\, \overline{ED}, \qquad \overline{DA} \,||\, \overline{CB}, \qquad \overline{BD} \,||\, \overline{AE}, \qquad \overline{EB} \,||\, \overline{DC}.$$

Daher sind die Vierecke $ACDE$, $ABCD$, $ABDE$ und $BCDE$ Trapeze. Folglich addieren sich die folgenden Winkel zu 180°:

$$\begin{aligned}
&\measuredangle CAE + \measuredangle AED = 180°, \quad \measuredangle ADC + \measuredangle DCB = 180°, \quad \measuredangle DBA + \measuredangle BAE = 180°, \quad \measuredangle BED + \measuredangle EDC = 180°,\\
&\measuredangle DCA + \measuredangle EDC = 180°, \quad \measuredangle BAD + \measuredangle CBA = 180°, \quad \measuredangle EDB + \measuredangle AED = 180°, \quad \measuredangle CBE + \measuredangle DCB = 180°.
\end{aligned}$$

Das Fünfeck hat eine senkrechte Symmetrieachse, da die Faltung von vorne und hinten betrachtet identisch ist. Folglich gilt unter anderem:

$$|ED| = |CD|, \qquad |AE| = |BC|, \qquad |AD| = |BD|, \qquad |BE| = |AC|,$$

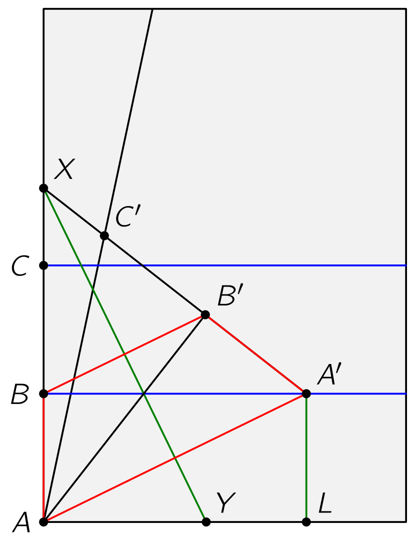
$$\measuredangle EDA = \measuredangle BDC,\ \measuredangle BED = \measuredangle DCA,\ \measuredangle AEB = \measuredangle ACB,\ \measuredangle DAE = \measuredangle CBD,\ \measuredangle CAD = \measuredangle DBE,\ \measuredangle BAC = \measuredangle EBA.$$

Würde man das Fünfeck wieder auseinanderfalten, so fände man die Punkte A, B, C, D, E (mehrmals) am Rand des Streifens wieder. Also ergänzen sich die folgenden Winkel zu einem gestreckten Winkel (also zu 180°):

$$\begin{aligned}
&\measuredangle EDC + \measuredangle ADC = 180°, \qquad \measuredangle CBA + \measuredangle DBA = 180°, \qquad \measuredangle AED + \measuredangle BED = 180°,\\
&\measuredangle DCA + \measuredangle DCB = 180°, \qquad \measuredangle BAD + \measuredangle BAE = 180°, \qquad \measuredangle EDB + \measuredangle EDC = 180°.
\end{aligned}$$

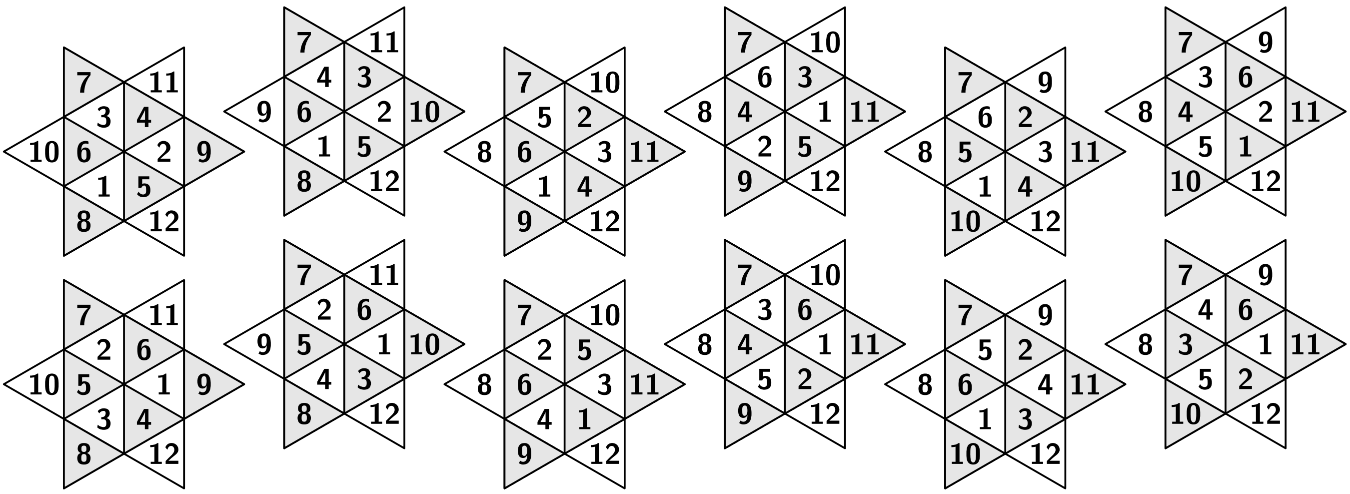
Aus $\measuredangle CBE = 180° - \measuredangle DCB = \measuredangle DCA = \measuredangle BED$ folgt, dass das Trapez $BCDE$ gleichschenklig ist. Also gilt $|ED| = |BC|$ und damit $|AE| = |ED| = |DC| = |BC|$ sowie $\measuredangle EDC = \measuredangle DCB$.
Aus $\measuredangle EDA = \measuredangle EDC - \measuredangle ADC = (180° - \measuredangle DCA) - (180° - \measuredangle DCB) = \measuredangle DCB - \measuredangle DCA = \measuredangle ACB = \measuredangle AEB$ folgt, dass die Dreiecke ADE und BEA kongruent sind (sws). Also gilt zum einen $|AB| = |EA|$ und damit haben die fünf Seiten des Fünfecks die gleiche Länge. Zum anderen gilt $\measuredangle BAE = \measuredangle AED$, und daraus folgt $\measuredangle CBA = \measuredangle BAE = \measuredangle AED = \measuredangle DCB = \measuredangle EDC$. Also sind die fünf Innenwinkel des Fünfecks gleich groß und somit ist das Fünfeck regelmäßig.

$\boxed{4}$ Es sei L der Lotfußpunkt von A' auf die untere Seite des A4-Blatts. Wir zeigen, dass die Dreiecke ALA', $AA'B'$ und $AB'C'$ zueinander kongruent sind.



Da A auf A' und B auf B' gefaltet wurde, stehen die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ senkrecht auf der Faltlinie $\overline{XY}$. Also sind $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ parallel und somit ist das Viereck $AA'B'B$ ein Trapez. Wegen $|AB| = |A'B'|$ ist dieses Trapez gleichschenklig, und die Faltlinie $\overline{XY}$ Symmetrieachse des Trapezes. Die Strecke AB' wird durch Spiegelung an XY auf $A'B$ abgebildet, und die Strecke $\overline{AB}$ auf $\overline{A'B'}$. Da $\overline{BA'}$ parallel zur unteren Seite des A4-Blatts ist, ist sie senkrecht zur linken Seite, also $\overline{BA'} \perp \overline{AB}$. Nach der Spiegelung an $\overline{XY}$ ist folglich $\overline{B'A} \perp \overline{A'B'}$. Damit ist $\measuredangle AB'A' = \measuredangle C'B'A = 90°$. Aus $|A'B'| = |AB| = |BC| = |B'C'|$ folgt, dass die Dreiecke $AA'B'$ und $AB'C'$ kongruent sind (sws). Aus $|A'B'| = |AB| = |LA'|$ und $\measuredangle A'LA = 90°$ folgt, dass die Dreiecke $AA'B'$ und ALA' kongruent sind (SsW).
Insgesamt folgt daraus, dass $\measuredangle LAA' = \measuredangle A'AB' = \measuredangle B'AC'$ gilt. Also wird der Winkel $\measuredangle LAC'$ durch die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{AB'}$ gedrittelt.

Seite 30: Bis auf Drehung und Spiegelung gibt es die folgenden Möglichkeiten:



Seite 31: Der Oberflächeninhalt des $4 \times 4 \times 4$-Würfels beträgt $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ Einheitsquadrate. Der Oberflächeninhalt des Körpers, der durch das Entfernen einiger Würfel entsteht, soll $96 \cdot 1{,}5 = 144$ Einheitsquadrate betragen. Der Oberflächeninhalt muss also um $144 - 96 = 48$ Einheitsquadrate größer werden.

Nehmen wir von außen einen Würfel, der an einer der Ecken liegt, heraus, so verändert sich der Oberflächeninhalt nicht. Nehmen wir von außen einen Würfel, der an einer der Kante liegt, heraus, so vergrößert sich der Oberflächeninhalt um 2 Einheitsquadrate. Nehmen wir von außen einen Würfel, der nicht an einer der Ecken oder einer der Kanten liegt, heraus, so vergrößert sich der Oberflächeninhalt um 4 Einheitsquadrate.

Wegen $48 : 4 = 12$, müssen mindestens 12 Würfel entfernt werden. Das geht, indem auf jeder der 6 Seiten aus der Mitte 2 Würfel entfernt werden, die sich nur mit einer Kante berühren (siehe Abbildung rechts).