Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2022“ für die Klassenstufen 3 bis 8

1	A	B	8
C	6	4	D
7	E	F	G
3	H	2	5

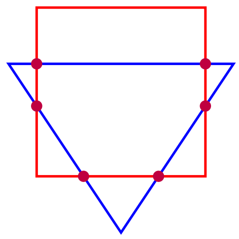
Seite 4: Damit nach den zwei Verschiebungen in jeder Reihe 2 Münzen liegen, muss auf jeden Fall eine der 8 Münzen in die 3. Zeile auf Feld E, F oder G geschoben werden. Diese Fälle gehen wir nun systematisch durch und überlegen uns, welche Münze als zweites geschoben werden kann.

1. Münze	2. Münze	1. Münze	2. Münze	1. Münze	2. Münze
$1 \to E$	$2 \to B$ / $3 \to 1$	$1 \to F$	$2 \to A$	$1 \to G$	$5 \to A$
$2 \to E$	$1 \to B$ / $7 \to F$ / $3 \to 2$	$2 \to F$	$1 \to A$ / $7 \to E$ / $3 \to H$	$2 \to G$	geht nicht
$3 \to E$	geht nicht	$3 \to F$	$2 \to H$	$3 \to G$	$8 \to A$ / $5 \to H$
$4 \to E$	$3 \to 4$	$4 \to F$	geht nicht	$4 \to G$	geht nicht
$5 \to E$	$7 \to G$ / $3 \to 5$	$5 \to F$	geht nicht	$5 \to G$	$1 \to A$ / $7 \to E$ / $3 \to H$
$6 \to E$	$3 \to 6$	$6 \to F$	geht nicht	$6 \to G$	geht nicht
$7 \to E$	$2 \to F$ / $5 \to G$ / $3 \to 7$	$7 \to F$	$2 \to E$	$7 \to G$	$5 \to E$
$8 \to E$	$3 \to 8$	$8 \to F$	geht nicht	$8 \to G$	$3 \to A$

Die roten Möglichkeiten entsprechen den blauen, wenn man die Reihenfolge vertauscht. Wenn man die Reihenfolge nicht beachtet, gibt es insgesamt 23 verschiedene Möglichkeiten, 2 Münzen jeweils so auf ein leeres Feld zu verschieben, dass dann in jeder Reihe 2 Münzen liegen.

Seite 5: Henry schreibt der Reihe nach die folgenden Zahlen: 2, 20, 22, 200, 202, 220, 222, 2000, 2002, 2020, 2022, 2200, 2202, 2220, 2222, 20000, 20002, 20020, 20022, 20200. Die 2022 ist die 11. Zahl auf Henrys Liste. Die 20. (und damit letzte) Zahl auf Henrys Liste ist die 20200.

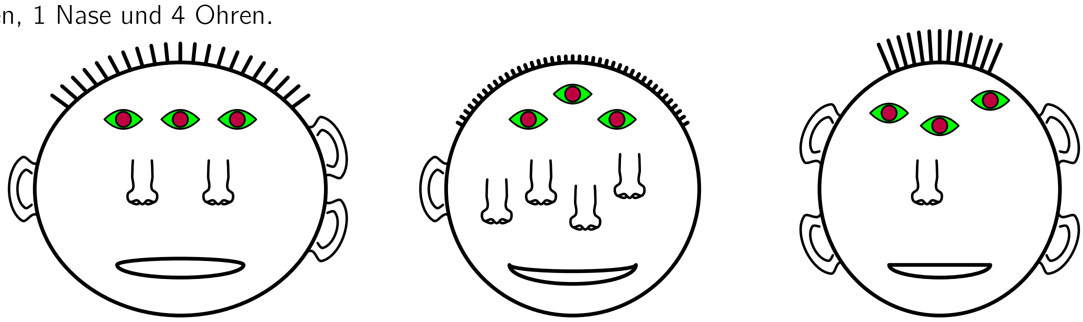
Seite 6: Jede Dreiecksseite schneidet das Quadrat entweder in 0, in 1 oder in 2 Punkten. Das heißt, dass es nicht mehr als $3 \cdot 2 = 6$ Schnittpunkte geben kann. Im Beispiel, das rechts abgebildet ist, schneiden sich das Dreieck und das Quadrat in 6 Punkten. Dabei schneidet jede Dreiecksseite das Quadrat in genau 2 Punkten. Also ist 6 die gesuchte größte Anzahl an Schnittpunkten.



Seite 8: Beim ersten Bild liegt die rechte Schlaufe auf der linken Schlaufe. So entsteht kein Knoten, wenn Aayana an den beiden Enden zieht. Beim fünften Bild liegt die linke Schlaufe auf der rechten Schlaufe. So entsteht ebenfalls kein Knoten. Wenn Aayana jeweils im zweiten oder im dritten Bild an den beiden Enden, so wird die rechte Schlaufe vollständig durch die linke Schlaufe gezogen. Im zweiten und im dritten Bild entstehen also auch keine Knoten. Nur im vierten Bild entsteht ein Knoten, wenn Aayana an den beiden Enden zieht, und zwar ein sogenannter Kreuzknoten.

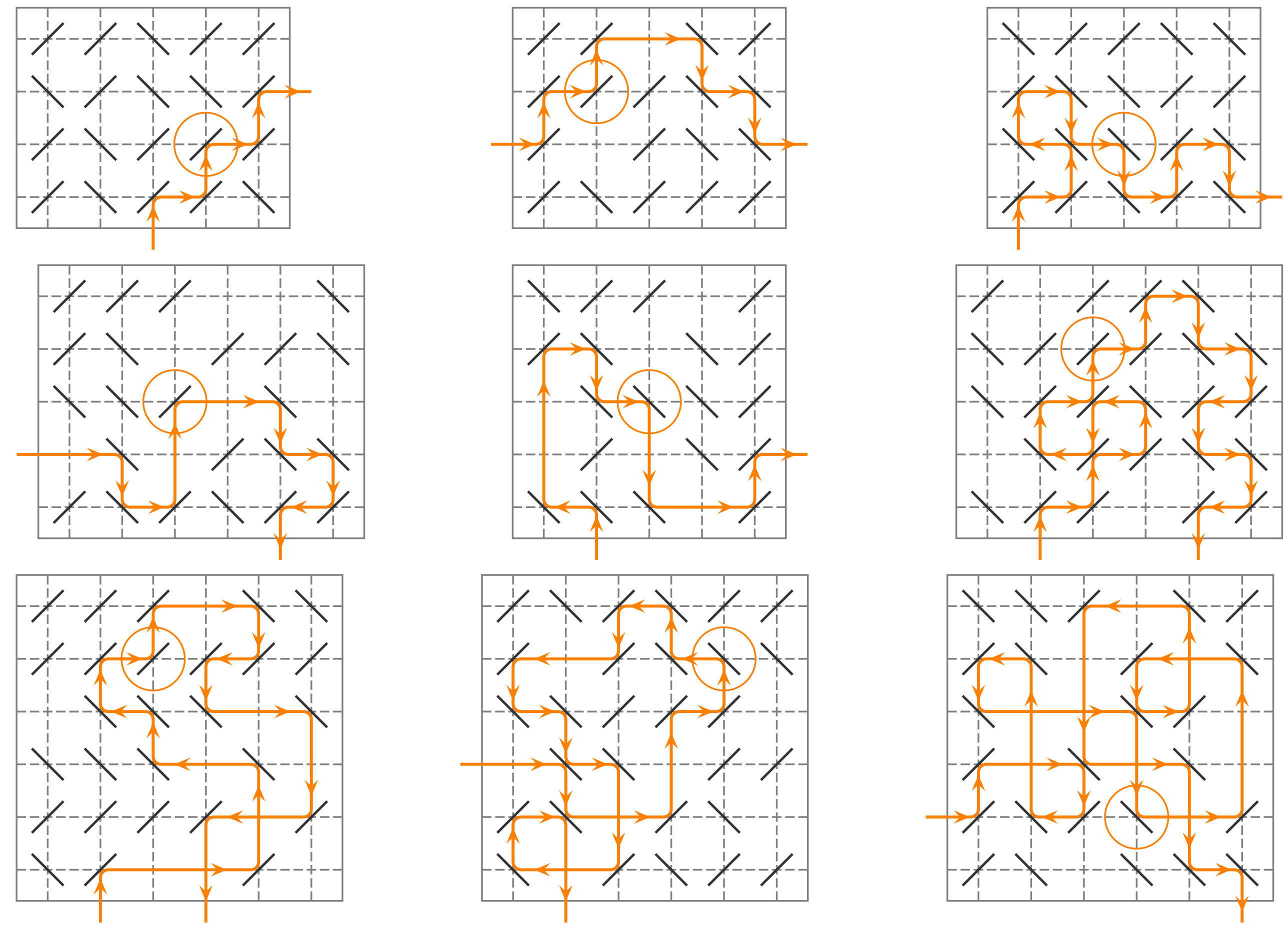
Seite 10: Gesucht waren die folgenden Tiere:
Siebenschläfer, Spitzmaus, Kreuzspinne, Hundertfüßler, Mantelmöwe, Dreieckmuschel, Würfelqualle, Neunauge (das ist ein fischähnliches Wirbeltier), Kugelfisch, Ellipsenwasserbock (das ist eine Antilope), Kegelrobbe, Gammaeule (das ist ein Schmetterling).

<u>Seite 10</u>: Da jeder Marsianer mindestens ein Auge, ein Ohr und eine Nase hat, können wir als erstes bei Xathos, Yorthos und Zaramis jeweils ein Auge, ein Ohr und eine Nase einzeichnen.
Insgesamt sind wegen 1. auf die drei Marsianer 9 Augen, 8 Ohren und 7 Nasen zu „verteilen".
Wegen 3. hat jeder von ihnen $9 : 3 = 3$ Augen. Damit sind alle 9 Augen „verteilt".
Hätte Zaramis mehr als eine Nase, dann hätten wegen 2. Xathos und Yorthos jeweils mindestens 3 Nasen. Das wären dann zusammen mindestens $2 + 3 + 3 = 8$ Nasen, also zu viele. Folglich hat Zaramis genau eine Nase, und Xathos und Yorthos jeweils mindestens 2. Die restlichen $7 - 2 - 2 - 1 = 2$ Nasen müssen auf Xathos und Yorthos „verteilt" werden.
Wegen 4. hat Zramis von den 8 Ohren genau die Hälfte, also $8 : 2 = 4$. Die restlichen $8 - 1 - 1 - 4 = 2$ Ohren müssen auf Xathos und Yorthos „verteilt" werden.
Da Xathos mindestens 2 Nasen hat, sind bei ihm wegen 5. mindestens 3 Ohren einzuzeichnen. Damit sind alle 7 Ohren „verteilt".
Folglich hat Xathos wegen 5., da er genau 3 Ohren hat, genau 2 Nasen. Die restlichen 2 Nasen sind also bei Yorthos einzuzeichnen.
Somit hat Xathos 3 Augen, 2 Nasen und 3 Ohren; Yorthos hat 3 Augen, 4 Nasen und 1 Ohr; Zaramis hat 3 Augen, 1 Nase und 4 Ohren.

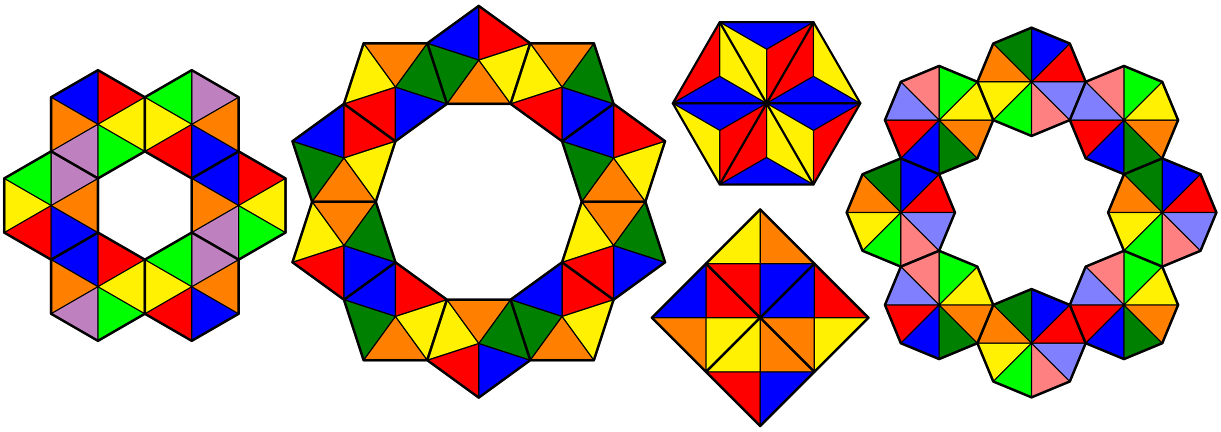


Xathos Yorthos Zaramis

<u>Seite 11</u>: In den Lösungsbildern ist jeweils die Wand eingekreist, die gedreht werden musste, sowie der gesamte Verlauf des Laserstrahls durch das Labyrinth.

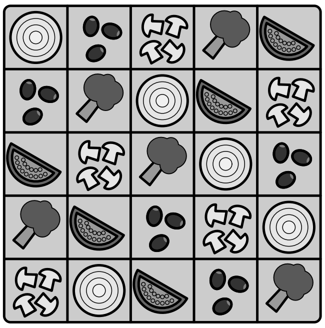


Seite 12: So könnten die bunt ausgemalten Ringe aussehen. Dabei muss immer jedes 2. Vieleck exakt gleich ausgemalt werden, also ohne dass es gedreht werden muss.



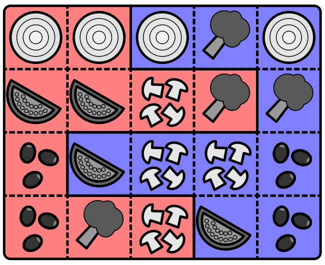
Seite 13:

1 So sieht Noras fertige Pizza aus:

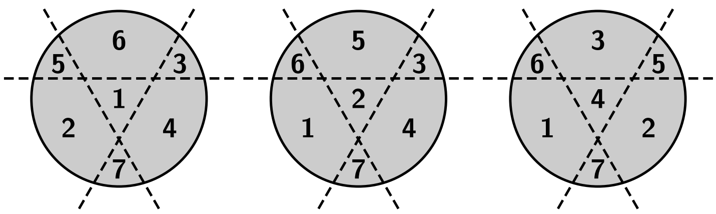


2 Da Annas Eltern jeweils ein Viertel der Pizza bekommen sollen, muss die Anzahl der Stücke ein Vielfaches von 4 sein. Beide Eltern zusammen bekommen eine halbe Pizza, also bekommen auch die Kinder zusammen eine halbe Pizza. Anna und ihre Brüder bekommen davon jeweils ein Drittel, das ist ein Sechstel der gesamten Pizza. Die Anzahl der Stücke muss also auch ein Vielfaches von 6 sein. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4 und 6 ist 12. Demzufolge muss die Pizzeria die Pizza in 12 Stücke schneiden oder ein Vielfaches davon (24, 36, 48, . . .). Wird die Pizza in 12 Stücke geschnitten, bekommen die Eltern jeweils 3 Stücke und die Kinder jeweils 2.

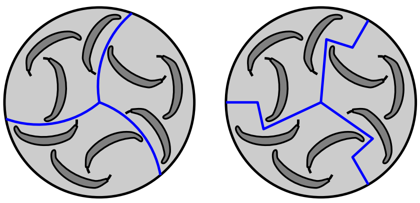
3 Die Pizza muss wie folgt geschnitten werden:



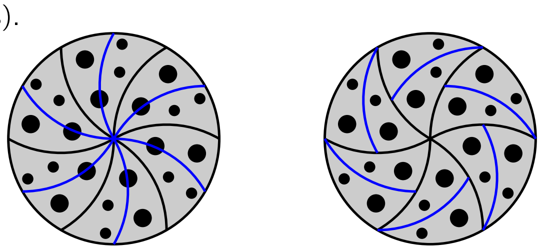
4 Auf beiden Seiten der drei Schnittlinien müssen jeweils $28 : 2 = 14$ Oliven liegen. $14 = 7+4+2+1$ ist die einzige Zerlegung der 14 in vier Summanden, bei der die 7 vorkommt. Demzufolge muss das Stück mit 7 Oliven eines der drei kleinen Randstücke sein, da es ansonsten mindestens zwei Zerlegungen der 14 in vier Summanden, bei der die 7 vorkommt, geben müsste. Bis auf Drehung und Spiegelung gibt es die folgenden drei möglichen Aufteilungen.



5 Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, die Pizza wie gewünscht zu schneiden. Hier sind zwei Beispiele:

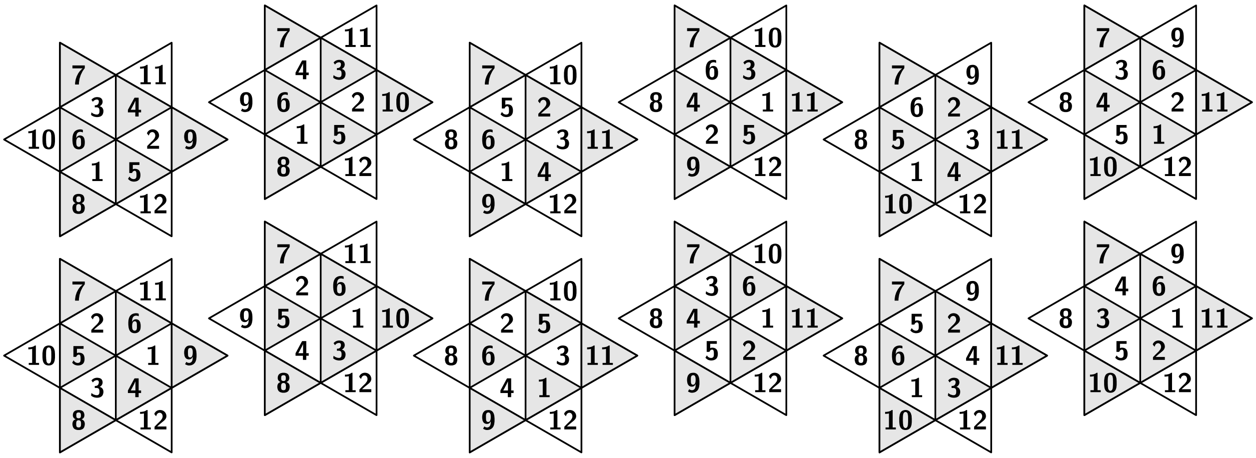


6 Würde Ludwig die 6 Stücke wie zuvor mit einem runden Schnitt vom Pizzamittelpunkt zum Rand zerschneiden (siehe Bild links), so hätten die Stücke zwar alle dieselbe Form, aber der Belag wäre nicht völlig gleich. Ludwig muss den Schnitt genauso machen wie zuvor, aber diesmal am Mittelpunkt der vorigen Schnittkanten beginnend (siehe Bild rechts).



Seite 16: Eine Möglichkeit lautet $976 + 845 + 201 = 2022$.

Seite 19: Bis auf Drehung und Spiegelung gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:



Seite 20: Wir überlegen uns als erstes, was als Ergebnis der vier Rechnungen überhaupt in Frage kommt. Da das Ergebnis gleich $O \cdot O$ ist, muss es eine Quadratzahl sein. Das Doppelte dieses Ergebnisses ist gleich $(N+G)+(A+R)$. Es gilt $N+G+A+R \geq 0+1+2+3 = 6$ und $N+G+A+R \leq 6+7+8+9 = 30$. Also ist das Ergebnis größer oder gleich $10 : 2 = 3$ und kleiner oder gleich $30 : 2 = 15$. Die einzigen Quadratzahlen in diesem Bereich sind 4 und 9.

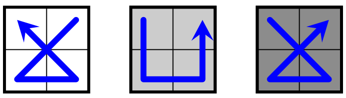
Fall 1: Das Ergebnis ist 4. In diesem Fall wäre $O = 2$. Damit wäre $K = 4$ und $A = 1$ oder $K = 1$ und $A = 4$. Die beiden Summen müssten $0 + 4$ und $1 + 3$ sein. Dann müsste aber K (da $K = 1$ oder $K = 4$ ist) ebenfalls als Summand auftauchen, das ist aber nicht der Fall. Fall 1 kann also nicht eintreten.

Fall 2: Das Ergebnis ist 9. In diesem Fall wäre $O = 3$. Damit wäre $K = 9$ und $A = 1$ oder $K = 1$ und $A = 9$. Wären $K = 9$ und $A = 1$, so wäre $R = 8$ und wir erhalten mit $G = 7$ und $N = 2$ die größtmögliche Summe $K + G = 9 + 7 = 16$. Wäre dagegen $K = 1$, so wäre die Summe $K + G \leq 1 + 8 = 9$ und damit kleiner als 16.

Seite 22: In dem abgebildeten magischen 3×3-Quadrat ist die „magische Summe“ 15:

$$2+7+6 = 9+5+1 = 4+3+8 = 2+9+4 = 7+5+3 = 6+1+8 = 4+5+6 = 2+5+8 = 15.$$

Das größere magische Quadrat entsteht, indem jedes Feld des kleineren magischen Quadrats in 4 Quadrate zerlegt wird. Anschließend werden die Zahlen aufsteigend eingetragen: Die Zahlen 1, 2, 3, 4 in die vier Felder, wo die 1 stand; 5, 6, 7, 8 in die vier Felder, wo die 2 stand; 9, 10, 11, 12 in die vier Felder, wo die 3 stand; und so weiter. Die Position der vier Zahlen, die jeweils eingetragen werden, wird durch die Farbe des Feldes bestimmt (rechts ist angegeben, wie die vier Felder der 1 befüllt werden müssten):



4	1
2	3

1	4
2	3

1	4
3	2

So sehen die beiden fertigen magischen Quadrate aus:

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

→

44	41	96	93	28	25	80	77	12	9
42	43	94	95	26	27	78	79	10	11
16	13	48	45	100	97	32	29	64	61
14	15	46	47	98	99	30	31	62	63
68	65	20	17	49	52	84	81	36	33
66	67	18	19	50	51	82	83	34	35
37	40	69	72	4	1	53	56	85	88
38	39	70	71	2	3	54	55	86	87
89	92	21	24	73	76	5	8	57	60
91	90	23	22	75	74	7	6	59	58

8	5	28	25	24	21
6	7	26	27	22	23
36	33	17	20	4	1
34	35	18	19	2	3
13	16	12	9	29	32
14	15	10	11	30	31

←

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Warum das funktioniert:
Da wir die Zahlen der Reihe nach eintragen, stehen im großen Quadrat nun die Zahlen von 1 bis 36. Um zu sehen, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen gleich sind, machen wir dieselbe Konstruktion auf einem kleinen Umweg.

Wir verkleinern jeden Eintrag um 1. In jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen haben die Zahlen nun die Summe $15 - 3 = 12$.

Wir multiplizieren jeden Eintrag mit 4, und schreiben ihn jeweils viermal in das große Quadrat. In jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen haben die Zahlen nun die Summe $12 \cdot 4 \cdot 2 = 96$.

Wir addieren 1, 2, 3 oder 4, je nach Position und Farbe. In jeder Zeile haben die Zahlen nun die Summe $96 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4 + 1 = 111$ bzw. $96 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 111$. In jeder Spalte haben die Zahlen nun die Summe $96 + 4 + 2 + 4 + 2 + 1 + 2 = 111$ bzw. $96 + 1 + 3 + 1 + 3 + 4 + 3 = 111$. In den beiden Diagonalen haben die Zahlen nun die Summe $96 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 1 = 111$ bzw. $96 + 4 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 = 111$.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

$\xrightarrow{-1}$

1	6	5
8	4	0
3	2	7

$\xrightarrow{\cdot 4}$

4	4	24	24	20	20
4	4	24	24	20	20
32	32	16	16	0	0
32	32	16	16	0	0
12	12	8	8	28	28
12	12	8	8	28	28

+4	+1
+2	+3

$\longrightarrow$

+1	+4
+2	+3

8	5	28	25	24	21
6	7	26	27	22	23
36	33	17	20	4	1
34	35	18	19	2	3
13	16	12	9	29	32
14	15	10	11	30	31

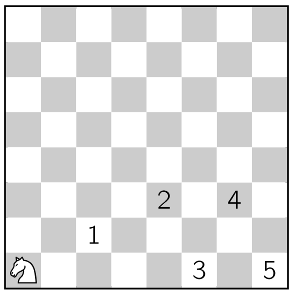
Seite 23:

Jedes Mitglied spielt gegen jedes andere Mitglied einmal mit weiß. Das sind bei M Mitgliedern jeweils $M - 1$ Spiele. Also gibt es insgesamt $M \cdot (M - 1)$ Spiele, da bei jedem Spiel einer die weißen und der andere die schwarzen Figuren hat. Z. B. gibt es bei 7 Mitgliedern genau $7 \cdot (7 - 1) = 7 \cdot 6 = 42$ Spiele. Wir listen in einer Tabelle auf, wie viele Spiele es gibt, wenn der Schachklub 2, 3, 4, 5, ... Mitglieder hat. Bei 12 Mitgliedern finden genau 132 Spiele statt.

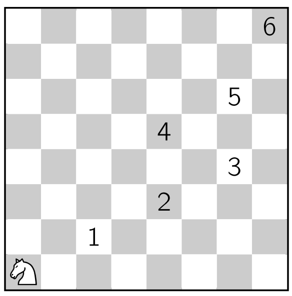
Mitglieder	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	M
Spiele	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	$M \cdot (M - 1)$

Es gibt Quadrate der Größe 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6, 7×7 und 8×8. Um ihre Anzahl zu bestimmen, zählen wir, wie viele Möglichkeiten es jeweils für die linke obere Ecke gibt. Davon gibt es insgesamt $7 \cdot 7 = 49$, $6 \cdot 6 = 36$, $5 \cdot 5 = 25$, $4 \cdot 4 = 16$, $3 \cdot 3 = 9$, $2 \cdot 2 = 4$ bzw. $1 \cdot 1 = 1$ Stück. Das sind zusammen $49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 140$ Quadrate, die aus mehreren Feldern bestehen.

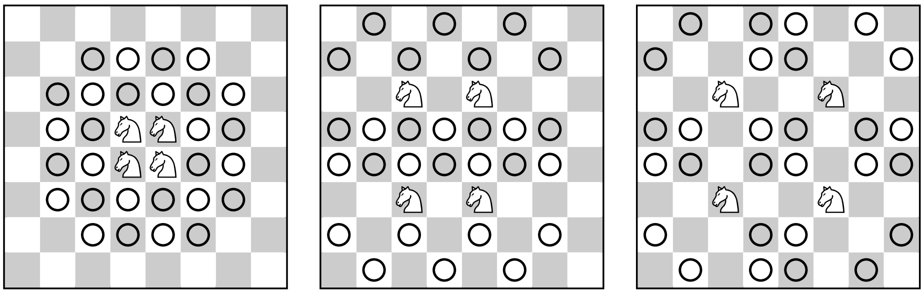
untere linke Ecke → untere rechte Ecke
Der Springer zieht immer abwechselnd auf ein weißes und ein schwarzes Feld. Die Anzahl der Züge, die der Springer von der unteren linken Ecke (schwarz) zur unteren rechten Ecke (weiß) benötigt, muss also ungerade sein. Insgesamt muss der Springer 7 Felder nach rechts springen. In einem Zug kommt er maximal 2 Felder nach rechts, daher reichen 3 Züge nicht aus ($3 \cdot 2 = 6 < 7$). Die nächstgrößere ungerade Zahl ist 5, und 5 Zügen reichen aus, wie das Bild links zeigt.



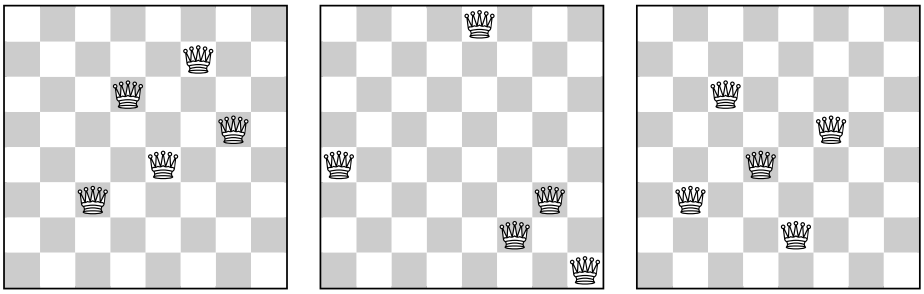
untere linke Ecke → obere rechte Ecke
Der Springer zieht immer abwechselnd auf ein weißes und ein schwarzes Feld. Die Anzahl der Züge, die der Springer von der unteren linken Ecke (schwarz) zur oberen rechten Ecke (schwarz) benötigt, muss gerade sein. Insgesamt muss der Springer 7 Felder nach rechts und 7 Felder nach oben springen, also zusammen 14 Felder. In einem Zug kommt er maximal $2 + 1 = 3$ Felder dem Ziel näher, daher reichen 4 Züge nicht aus ($4 \cdot 3 = 12 < 14$). Die nächstgrößere gerade Zahl ist 6, und 6 Zügen reichen aus, wie das Bild rechts zeigt.



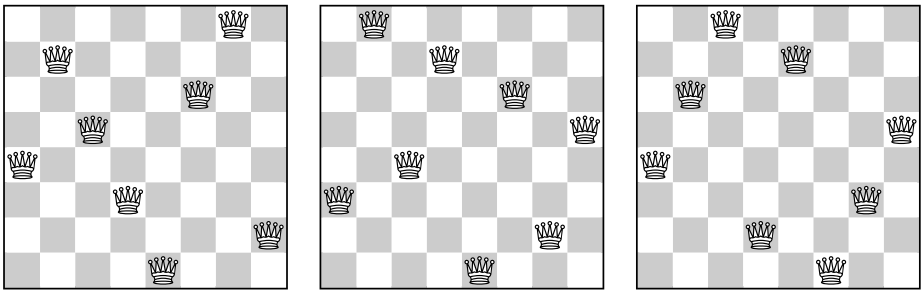
Es gibt mehrere Möglichkeiten, drei davon sind hier abgebildet:



Es gibt mehrere Möglichkeiten, drei davon sind hier abgebildet:



Es gibt mehrere Möglichkeiten, drei davon sind hier abgebildet:



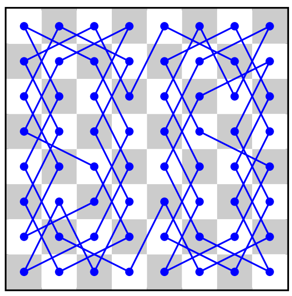
Auf einem 4×4-Schachbrett kann der Springer nicht so bewegt werden, dass er jedes Feld genau einmal erreicht. Auf einem 5×5-Schachbrett geht das, aber nur, wenn der Springer auf einem schwarzen Feld startet. Auf einem 8×8-Schachbrett kann der Springer von einem beliebigen Feld starten, das Beispiel zeigt einen Rundweg.

22	9	4	17	24
13	18	23	10	5
8	21	12	3	16
19	14	1	6	11
♘	7	20	15	2

22	11	6	3	24
5	16	23	12	7
10	21	4	17	2
15	♘	19	8	13
20	9	14	1	18

24	9	14	3	18
15	2	17	8	13
10	23	6	19	4
1	16	21	12	7
22	11	♘	5	20

22	11	6	1	24
5	16	23	12	7
10	21	♘	17	2
15	4	19	8	13
20	9	14	3	18



Seite 31: Wie bereits in der Lösung der Aufgabe 21 geschrieben wurde: Der Unterschied der angezeigten Uhrzeiten wächst pro Stunde um 3 Minuten, und sie wurden gestern um 16:40 richtig gestellt.
Die beiden Uhren zeigen das nächste Mal dieselbe Uhrzeit, wenn der Unterschied der angezeigten Uhrzeiten 24 Stunden, also $24 \cdot 60 = 1440$ Minuten beträgt. Das wird $1440 : 3 = 480$ Stunden bzw. $480 : 24 = 20$ Tage nach dem Stellen der beiden Uhren sein, also in 19 Tagen um 16:40.
Da die Uhr in Vordorf jede Stunde um 1 Minute vorgeht, zeigt sie das nächste Mal nach $24 \cdot 60 = 1440$ Stunden die richtige Uhrzeit an. Das ist also genau 60 Tage nach dem Stellen der beiden Uhren. Zu diesem Zeitpunkt zeigt auch die Uhr in Nachburg die richtige Uhrzeit an (und zwar zum 2. Mal seit dem Stellen).

Seite 32: Die Anzahl der Punkte sind nach dem 1. Schritt $2n-1$, nach dem 2. Schritt $2(2n-1)-1 = 4n-3$, nach dem 3. Schritt $2(4n-3)-1 = 8n-7$ und nach dem 4. Schritt $2(8n-7)-1 = 16n-15$. In jedem Schritt verdoppelt sich der Faktor vor dem n. Da er nach dem 1. Schritt gleich 2 ist, ist er nach k Schritten genau 2^k. Die Zahl, die abgezogen wird, ist nach den ersten Schritten immer um 1 kleiner als der Faktor vor dem n. Und das bleibt auch so, da $2(2^k n-(2^k-1))-1 = 2^{k+1}n-(2^{k+1}-1)$. Daher gibt es ganz allgemein nach k Schritten $2^k n-(2^k-1)$ Punkte. Nach dem 6. Schritt sind es also $2^6 n-(2^6-1) = 64n-63$ Punkte und nach dem 9. Schritt $2^9 n-(2^9-1) = 512n-511$.