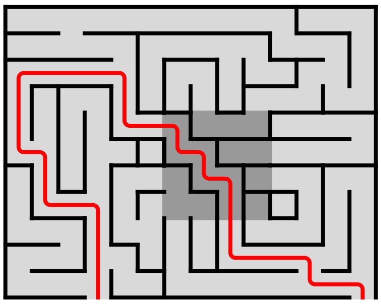
Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2021“ für die Klassenstufen 7 bis 13

Seite 6: Das 4. Teil vervollständigt das Labyrinth so, dass es einen Weg von A nach B gibt:



Seite 8: Sandy schreibt 5 Zahlen (aus 5en und 9en) auf, deren Summe 2021 ist. Die Summe der Einer muss also auf 1 enden. Das geht nur mit vier 9en und einer 5. Es entsteht ein Übertrag von 4. Die Summe der Zehner plus 4 muss demzufolge auf 2 enden. Also endet die Summe der Zehner auf 8. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: zwei 9en und zwei 5en oder nur zwei 9en. Im ersten Fall gäbe es 3 als Übertrag. Wir schaffen es aber nicht, mit den Hundertern die Summe 17 zu erzeugen. Also gibt es als Zehner nur zwei 9en und der Übertrag ist 2. Als Hunderter muss es dann zwei 9en geben. Insgesamt hat Sandy acht 9en und eine 5 verwendet. Die Summanden sind entweder 5, 9, 9, 999, 999 oder 9, 9, 9, 995, 999.

Seite 7: Die Maximalpunktzahl, die man beim Koala-Wettbewerb erzielen kann, erhält man, wenn man alle 20 Aufgaben richtig beantwortet. Dafür gibt es $20 \cdot 7$ Punkte $= 140$ Punkte.
Nun suchen wir die kleinste positive Zahl, die nicht als Summe von maximal 20 Summanden geschrieben werden kann, wobei jeder Summand entweder 7 oder -4 ist. Wir notieren als erstes, wie die Punktzahlen von 1 bis 7 entstehen können:

$$\begin{array}{ll} 1 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) & 2 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-4) \\ 3 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) & 4 = 4 \cdot 7 + 6 \cdot (-4) \\ 5 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-4) & 6 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot (-4) \\ 7 = 1 \cdot 7 + 0 \cdot (-4) & \end{array}$$

Bei jeder dieser Summen werden höchstens 10 Summanden benötigt. Das heißt, dass man bei jeder dieser Summen eine, zwei, drei, ..., zehn weitere 7en addieren kann, und dabei die Anzahl der Summanden immer noch höchstens 20 ist. Folglich lassen sich alle Punktzahlen von $1 + 1 \cdot 7 = 8$ bis $7 + 10 \cdot 7 = 77$ erreichen. Und des Weiteren, da bei 1 nur 8, bei 2 nur 5 und bei 3 nur 2 Summanden nötig sind, auch $1 + 11 \cdot 7 = 78$, $2 + 11 \cdot 7 = 79$ und $3 + 11 \cdot 7 = 80$. Die 81 kann nicht als Punktzahl erzielt werden: Da 81, $81+1\cdot 4 = 85, \ldots, 81+5\cdot 4 = 101$ allesamt nicht durch 7 teilbar sind, müssten mindestens 6 Aufgaben falsch beantwortet werden. Dann gibt es aber höchstens $14 \cdot 7 + 6 \cdot (-4) = 74$ Punkte.

Seite 8: Damit das Produkt von 8 ganzen Zahlen gleich 8 ist, müssen es bis auf Vorzeichen entweder

- eine 8 und sieben 1en oder
- eine 4, eine 2 und sechs 1en oder
- drei 2en und fünf 1en sein.

Im ersten und dritten Fall ist die Summe ungerade, unabhängig davon, wie viele dieser Zahlen negativ sind. Nur im zweiten Fall können wir versuchen, Zahlen durch ihr Negatives zu ersetzen. Dabei muss die Anzahl der negativen Zahlen gerade sein, da ansonsten das Produkt gleich -8 wäre. Nur für die Zahlen $4, 2, 1, 1, 1, 1, -1, -1$ ist die Summe der 8 ganzen Zahlen ebenfalls gleich 8.

Seite 10: Die Münzen müssen so auf die Felder gelegt werden, dass in den einzelnen Zeilen 0, 2 und 6 Münzen und in den einzelnen Spalten 1, 3 und 4 Münzen liegen oder genau umgekehrt. Hier sind 5 Möglichkeiten dargestellt, wie die 8 Münzen auf die 9 Felder verteilt werden können.

0	0	0
0	2	0
1	1	4

0	0	0
0	1	1
1	2	3

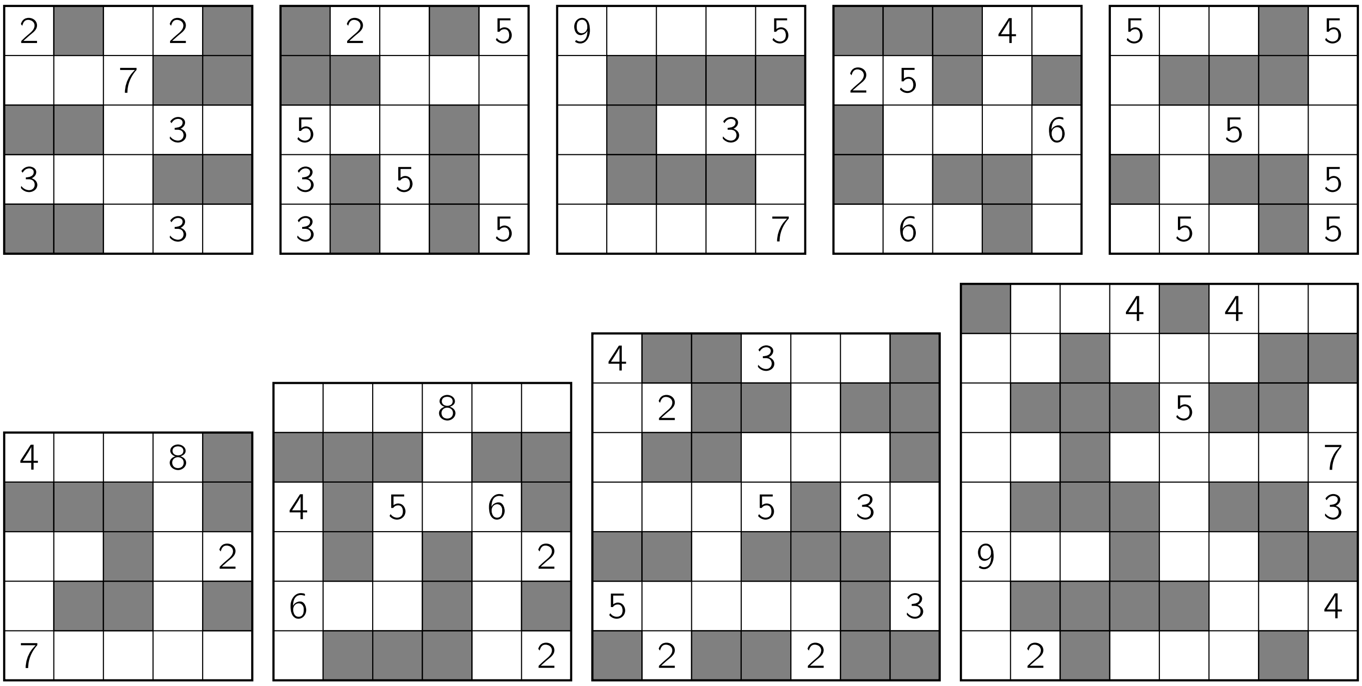
0	0	0
0	0	2
1	3	2

0	0	0
1	1	0
0	2	4

0	0	0
1	0	1
0	3	3

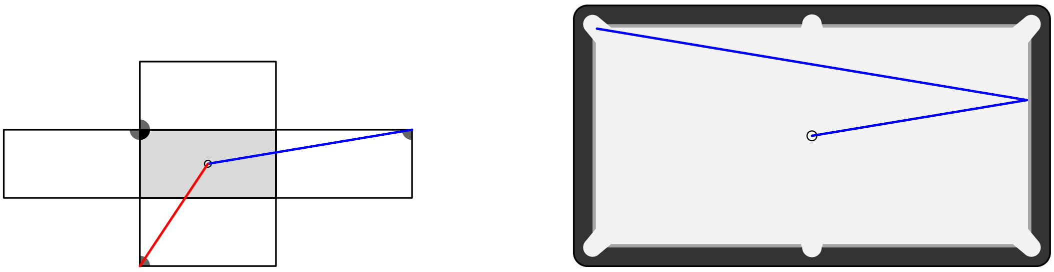
Alle anderen Möglichkeiten entstehen dadurch, dass das Quadrat gedreht wird (Faktor 2) und/oder Zeilen untereinander vertauscht werden (Faktor 3!) und/oder Spalten untereinander vertauscht werden (Faktor 3!). Somit gibt es insgesamt $5 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 3! = 360$ verschiedene Möglichkeiten.

<u>*Seite 12*</u>: Die Lösungen der Höhlenrätsel sind:

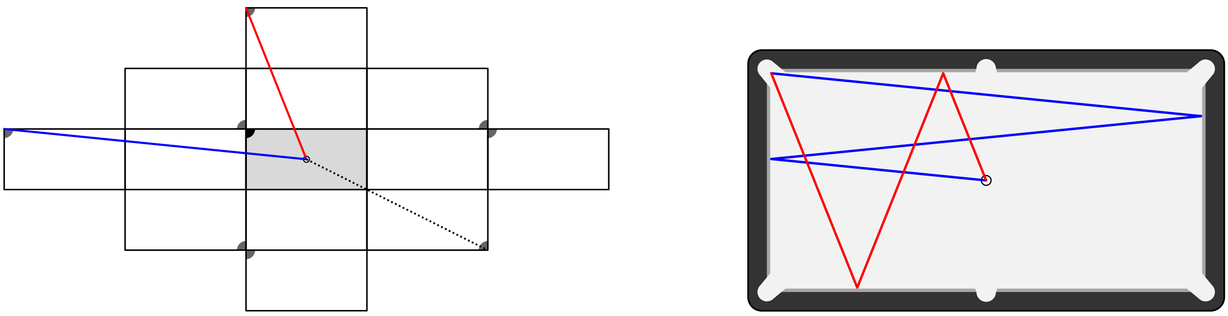


<u>*Seite 13*</u>: **Billard: ganz normal . . . oder mal anders!**

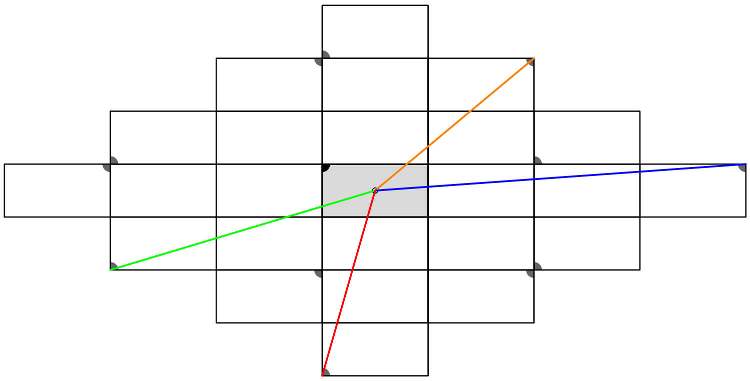
① Die zweite Möglichkeit, die weiße Kugel über <u>eine</u> Bande oben links zu lochen, besteht darin, sie gegen die rechte Bande zu stoßen. Diese exakte Stelle an der Bande finden wir, indem wir die Spielfläche an jeder der Banden spiegeln. Der Weg, den die Kugel auf der Spielfläche nimmt, ist dann als Verlängerung der Strecke, den die Kugel vom Startpunkt bis zur Bande nimmt, in den Spiegelbildern zu sehen.

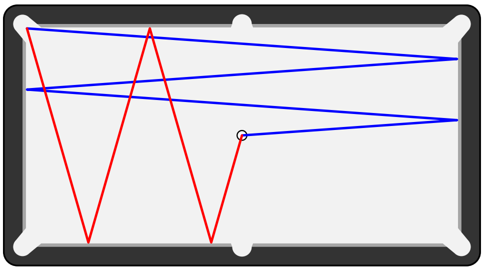


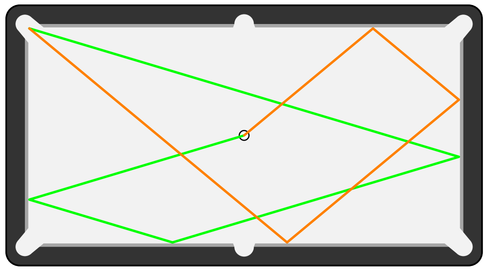
Um die Möglichkeiten zu finden, wie die weiße Kugel über <u>zwei</u> Banden oben links zu lochen ist, spiegeln wir erneut an den Banden der Spiegelbilder der Spielfläche. Dabei beachten wir, dass die Kugel auf ihrem Weg nicht schon vorher in ein Loch fällt (gepunktete Linie).



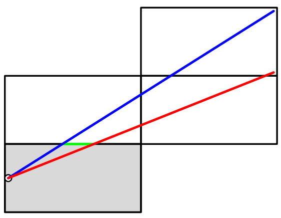
Um die Möglichkeiten zu finden, wie die weiße Kugel über drei Banden oben links zu lochen ist, spiegeln wir ein drittes Mal. Um die Kugel über drei Banden oben links zu lochen, kann sie wie zuvor so gestoßen werden, dass sie abwechselnd zwei gegenüberliegende Banden trifft. Sie kann aber auch so gestoßen werden, dass sie drei verschiedene Banden trifft.

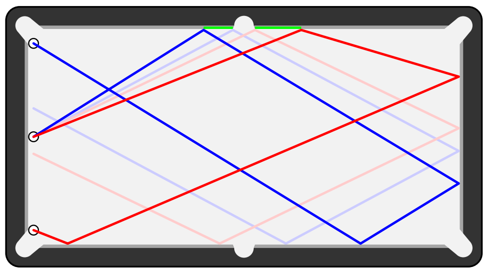




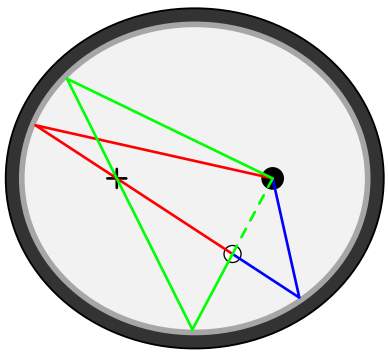


❷ Um diese Aufgabe zu lösen, spiegeln wir das Spielfeld nacheinander an der oberen, an der rechten und an der unteren Bande. Der grüne Strich auf der Bande gibt den Bereich an, der getroffen werden muss. Das Loch darf man dabei natürlich nicht treffen.

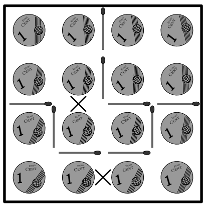


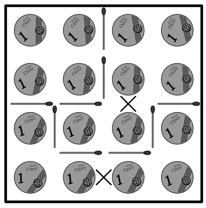


❸ Um die Kugel über eine Bande zu lochen, muss die Kugel so gestoßen werden, dass sie entlang der Geraden durch den Startpunkt und den linken Brennpunkt der Ellipse (also dem Kreuz) rollt. Diese beiden Möglichkeiten sind im Bild rot bzw. blau dargestellt. Um die Kugel über zwei Banden zu lochen, muss die Kugel so gestoßen werden, dass sie entlang der Geraden zwischen Startpunkt und dem rechten Brennpunkt der Ellipse (also dem Loch) rollt. Dann rollt sie nämlich nach der ersten Bandenberührung auf einer Geraden, die durch den linken Brennpunkt verläuft, und wird anschließend so reflektiert, dass sie danach direkt in das Loch fällt. Diese Möglichkeit ist im Bild grün dargestellt.



<u>*Seite 14*</u>: Es muss das untere Streichholz und eines der beiden mittleren Streichhölzer oben umgelegt werden. Die Bilder zeigen die beiden Lösungen.





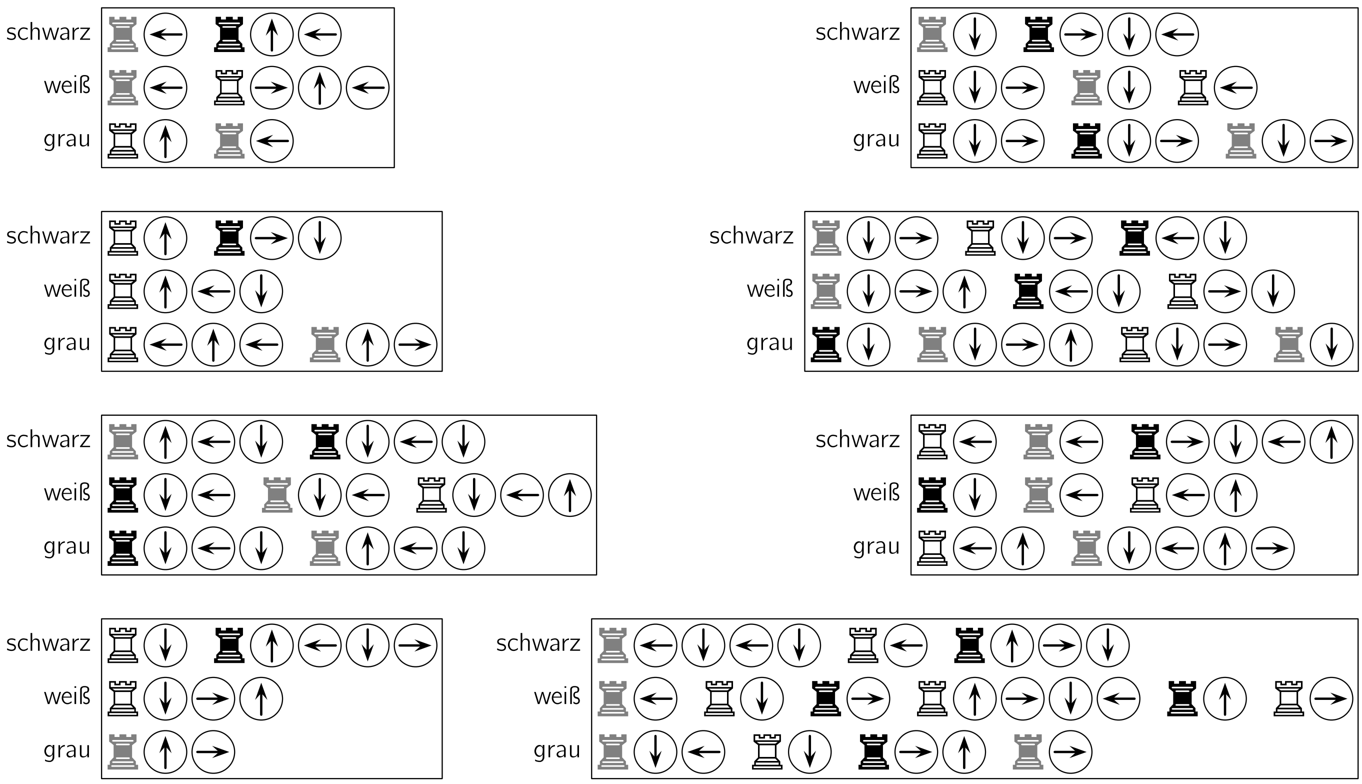
<u>*Seite 16*</u>: Wie in der Lösung der Aufgabe beschrieben, würde das 10. Kind nach 10 min unten ankommen, wenn jedes der Kinder erst starten würde, wenn das vorherige Kind unten ankommt. Insgesamt benötigen sie aber nun 7 min, also 3 min weniger. Die neun Kinder vom 2. bis zum 10. Kind starten also 3 min : 9 = 20 s früher als nach 1 min. Die Ampel springt also auf Grün, wenn ein Kind noch 20 s : 60 s = 1/3 der Strecke vor sich hat.

<u>*Seite 21*</u>: Damit das Produkt von 12 ganzen Zahlen gleich 12 ist, müssen es bis auf Vorzeichen entweder

- eine 12 und elf 1en oder
- eine 6, eine 2 und zehn 1en oder
- eine 4, eine 3 und zehn 1en oder
- eine 3, zwei 2en und neun 1en sein.

Im ersten und dritten Fall ist die Summe ungerade, unabhängig davon, wie viele dieser Zahlen negativ sind. Nur im zweiten und im vierten Fall können wir versuchen, Zahlen durch ihr Negatives zu ersetzen. Dabei muss die Anzahl der negativen Zahlen gerade sein, da ansonsten das Produkt gleich -12 wäre.
Es gibt die folgenden beiden Möglichkeiten, damit die Summe der 12 Zahlen ebenfalls gleich 12 ist:
$6, -2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1$ und $3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1$.

<u>*Seite 23*</u>: Wir geben jeweils eine Zugabfolge an, wie der schwarze, der weiße bzw. der graue Turm mit der kleinstmöglichen Anzahl an Zügen auf das Kreuz gezogen werden kann – erst die 6 kleinen, dann die 2 großen.



<u>Seite 24</u>: Die Lösungen der Rechengitter sind:

9	+	8	+	6	=	**23**
+		+		+		
5	+	2	+	1	=	**8**
+		+		+		
7	+	4	+	3	=	**14**
=		=		=		
21		**14**		**10**		

1	×	3	×	5	=	**15**
+		×		+		
6	×	7	+	8	=	**50**
−		+		+		
2	+	4	+	9	=	**15**
=		=		=		
5		**25**		**22**		

5	×	9	×	6	=	**270**
×		×		×		
8	×	7	×	3	=	**168**
×		×		×		
2	×	4	×	1	=	**8**
=		=		=		
80		**252**		**18**		

9	×	8	+	1	=	**73**
×		−		×		
6	+	7	−	3	=	**10**
+		+		×		
2	×	5	+	4	=	**14**
=		=		=		
56		**6**		**12**		

5	−	4	+	6	=	**7**
+		×		+		
2	×	3	+	9	=	**15**
+		−		+		
1	×	8	×	7	=	**56**
=		=		=		
8		**4**		**22**		

1	−	9	−	8	=	**-16**
+		÷		÷		
6	÷	3	÷	2	=	**1**
−		−		+		
7	−	4	−	5	=	**-2**
=		=		=		
0		**-1**		**9**		

4	×	7	+	2	=	**30**
+		×		+		
9	÷	3	×	8	=	**24**
−		+		−		
1	+	6	−	5	=	**2**
=		=		=		
12		**27**		**5**		

2	×	5	×	3	=	**30**
+		×		×		
7	+	6	−	8	=	**5**
+		−		÷		
1	+	9	+	4	=	**14**
=		=		=		
10		**21**		**6**		

7	×	3	×	4	=	**84**
−		−		−		
1	×	8	×	6	=	**48**
−		−		−		
2	×	5	×	9	=	**90**
=		=		=		
4		**-10**		**-11**		

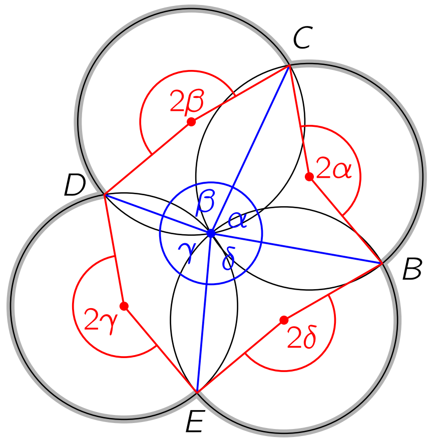
<u>Seite 25</u>: Die Summe der Zahlen, die Tommy notiert hat, endet wegen $3+4+5+6+7=25$ auf 5. Die Summe der Zahlen, die Tommy addiert hat, endet auf 1. Folglich muss Tommy die 0 an die Zahl angehängt haben, die auf $5-1=4$ endet, also die 144. Die Probe zeigt, dass $143+1440+145+146+147=2021$ gilt.

<u>Seite 26</u>: Mira schreibt 5 Zahlen (aus 5en und 7en) auf, deren Summe 2021 ist. Die Summe der Einer muss also auf 1 enden. Das geht nur mit drei 7en und zwei 5en. Es entsteht ein Übertrag von 3. Die Summe der Zehner plus 3 muss demzufolge auf 2 enden. Also endet die Summe der Zehner auf 9. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: zwei 7en und eine 5 oder zwei 7en und drei 5en. Im ersten Fall gäbe es 2 als Übertrag. Wir schaffen es aber nicht, mit den Hundertern die Summe 18 zu erzeugen. Also gibt es als Zehner zwei 7en und drei 5en und der Übertrag ist 3. Als Hunderter muss es dann eine 7 und zwei 5en geben. Insgesamt hat Mira sechs 7en und sieben 5en verwendet. Die Summanden sind nicht eindeutig bestimmt, es sind 55, 55, 557, 577, 777 und 57, 77, 555, 575, 757 zwei der vielen Möglichkeiten.

<u>*Seite 28*</u>: Wir suchen alle dreistelligen Zahlen $\overline{abc}$, für die $\overline{abc} = 4{,}5 \cdot \overline{cba}$ gilt. Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit 2, so erhalten wir $200a + 20b + 2c = 900c + 90b + 9a$, woraus durch Umformen $191a = 70b + 898c$ folgt. Wäre $c = 0$, so würde wegen $\overline{cba} = \frac{2}{9}\overline{abc}$ auch $a = 0$ gelten. Das ist aber nicht möglich, da $\overline{abc}$ eine dreistellige Zahl ist. Wäre $c \geq 2$, so wäre $191a = 70b + 898c \geq 70 \cdot 0 + 898 \cdot 2 = 1796$ und somit $a \geq \frac{1796}{191} > 9$. Das ist aber nicht möglich, da a eine Ziffer und damit kleiner oder gleich 9 ist. Folglich gilt $c = 1$, und wir erhalten $191a = 70b + 898$. Wir erkennen, dass $70b$ auf 0 endet, und demzufolge muss $a = 8$ und $b = \frac{191 \cdot 8 - 898}{70} = 9$ gelten. Die einzige Zahl mit den gewünschten Eigenschaften ist 891.

Wir suchen alle vierstelligen Zahlen $\overline{abcd}$, für die $\overline{abcd} + 189 = \overline{dcba}$ gilt, das heißt $999a + 90b + 189 = 999d + 90c$. Teilen wir beide Seiten der Gleichung durch 9, so erhalten wir $111a + 10b + 21 = 111d + 10c$. Umgeformt erhalten wir $10 \cdot (b - c) + 21 = 111 \cdot (d - a)$. Das Ergebnis der linken Seite endet auf 1, also muss $d - a = 1$ sein. Daraus folgt $b - c = \frac{111 - 21}{10} = 9$, und somit $b = 9$ und $c = 0$. Für a können wir die Zahlen von 1 bis 8 wählen, folglich gibt es acht Zahlen mit den gewünschten Eigenschaften: 1902, 2903, 3904, 4905, 5906, 6907, 7908, 8909.

<u>*Seite 31*</u>: Wir verbinden A (der gemeinsame Schnittpunkt der vier Kreise) mit B, C, D und E (die Endpunkte der Kreisbögen, die den Umfang bilden). Dann sind α, β, γ und δ Peripheriewinkel (im Bild blau) über den Sehnen $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EB}$. Es gilt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, bzw. 2π in Bogenlänge, da sie zusammen bei A einen Vollwinkel bilden. Die zugehörigen Zentriwinkel (im Bild rot) sind jeweils doppelt so groß wie die Peripheriewinkel. Jeder dieser Zentriwinkel entspricht einem der vier Abschnitte des Umfangs der Figur. Die Summe der Zentriwinkel ist gleich $720°$, bzw. 4π in Bogenlänge. Da die Radien der Kreise jeweils 1 cm lang sind, ist die Länge des Umfangs der Figur 4π cm.



Wir kommen aber auch ohne Peripherie- und Zentriwinkel aus. In jedem Kreis verbinden wir den Mittelpunkt mit den Schnittpunkten, die dieser Kreis mit den beiden benachbarten Kreisen hat (im Bild rot). Dadurch erhalten wir vier Rauten (alle Seiten sind Radien und somit 1 cm lang). Jede Raute wird durch eine jede ihrer Diagonalen in zwei kongruente Dreiecke zerlegt (im Bild blau). Insbesondere werden die Winkel durch diese Diagonale halbiert. Die Summe der Innenwinkel im Viereck $M_1M_2M_3M_4$ beträgt $360° = 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$. Also ist die Summe der Innenwinkel bei M_1, M_2, M_3 und M_4 des Achtecks $M_1CM_2DM_3EM_4B$ gleich $4 \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 720°$. Folglich ist die Summe der Winkel bei M_1, M_2, M_3 und M_4, die zu den Kreisbögen des Umfangs der Figur gehören, gleich $4 \cdot 360° - 720° = 720°$, bzw. 4π in Bogenlänge. Also ist, da die Radien der Kreise jeweils 1 cm lang sind, die Länge des Umfangs der Figur 4π cm.