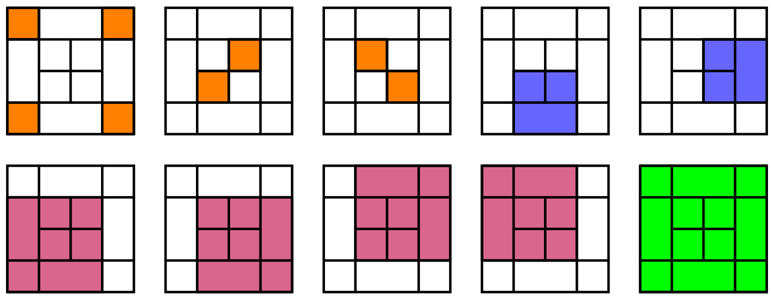
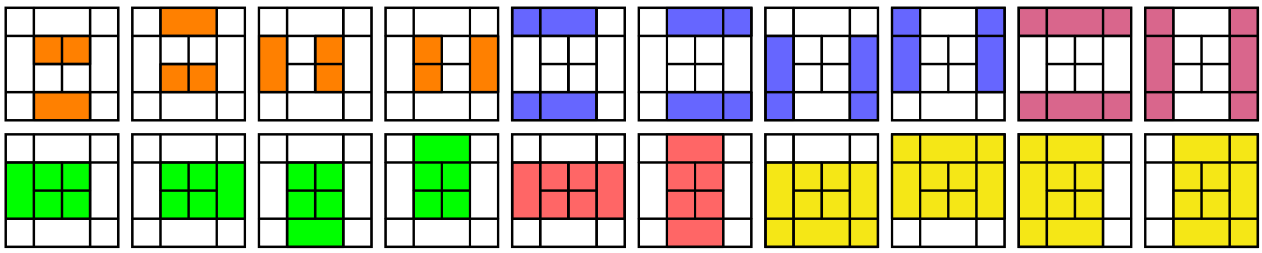
Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2021“ für die Klassenstufen 3 bis 8

<u>*Seite 4*</u>: Wir zählen die Quadrate getrennt aufsteigend nach der Größe. Von den kleinen 1×1-Quadraten gibt es 4 außen an den Ecken und 4 innen. Von den 2×2-Quadraten gibt es 4 an den Rändern und 1 in der Mitte. Von den 3×3-Quadraten gibt es 4 in den Ecken. Und es gibt 1 Quadrat der Größe 4×4, nämlich das gesamte Quadrat. Insgesamt lassen sich $8 + 5 + 4 + 1 = 18$ Quadrate im Bild finden.



Zusätzlich zu den 18 Quadraten lassen sich auch Rechtecke finden, die keine Quadrate sind. Von den 1×2-Rechtecken gibt es 4 an den Rändern und 4 innen. Von den 1×3-Rechtecken gibt es 8 an den Rändern (an jedem Rand 2). Von den 1×4-Rechtecken gibt es 4, von den 2×3-Rechtecken gibt es 4, von den 2×4-Rechtecken gibt es 2 und von den 3×4-Rechtecken gibt es 4. Es lassen sich zusätzlich zu den Quadraten $8 + 8 + 4 + 4 + 2 + 4 = 30$, also insgesamt $18 + 30 = 48$ Rechtecke im Bild finden.

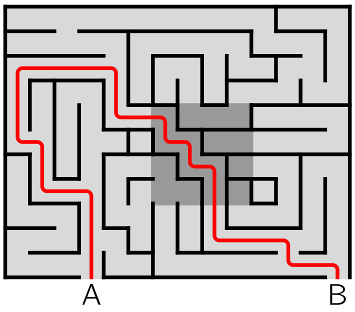


<u>*Seite 6*</u>: Bei jeder Auswahl von 2 dieser Luftballons ist die Summe der Zahlen jedes Mal ungleich 30. Cosima muss also mindestens 3 Luftballons kaufen. Würde sie dabei <u>nicht</u> den Luftballon mit der 3 kaufen, so wäre die Summe der Zahlen auf den Luftballons mindestens $9 + 13 + 14 = 36 > 30$. Folglich muss Cosima ganz sicher den Luftballon mit der 3 kaufen. Es gibt 2 Möglichkeiten, als Summe 30 zu erhalten, und zwar: $3 + 9 + 18 = 30$ und $3 + 13 + 14 = 30$.

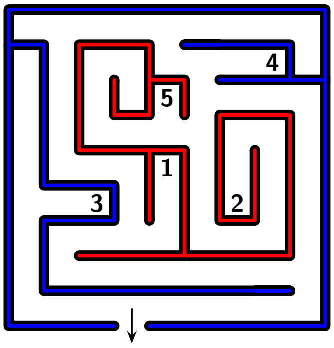
<u>*Seite 7*</u>: Die durch 3 und 4 teilbaren Zahlen sind die durch 12 teilbaren Zahlen. Diese sind automatisch auch durch 2 teilbar. Die kleinste durch 12 teilbare Zahl, die auch durch 5 teilbar ist, ist $5 \cdot 12 = 60$, das ist die gesuchte Anzahl.

<u>*Seite 8*</u>: Als erstes sehen wir, dass Diana mindestens einen 5-Euro-Schein benötigt, da sie nur mit 10-Euro- und 20-Euro-Scheinen die 95 Euro nicht passend zahlen kann. Mehr als einen 5-Euro-Schein verwendet Diana aber nicht, da sie ansonsten zwei 5-Euro-Scheine durch einen 10-Euro-Schein ersetzen könnte, und so weniger Scheine benötigen würde. Für die verbleibenden 95 Euro − 5 Euro = 90 Euro benötigt Diana mindestens einen 10-Euro-Schein, da sie nur mit 20-Euro-Scheinen die 90 Euro nicht passend zahlen kann. Auch von den 10-Euro-Scheinen verwendet Diana nicht mehr als einen, da sie ansonsten zwei 10-Euro-Scheine durch einen 20-Euro-Schein ersetzen könnte. Für die restlichen 90 Euro − 10 Euro = 80 Euro benötigt Diana noch 80 Euro : 20 Euro = 4 von den 20-Euro-Scheinen. Insgesamt sind das $1 + 1 + 4 = 6$ Scheine.

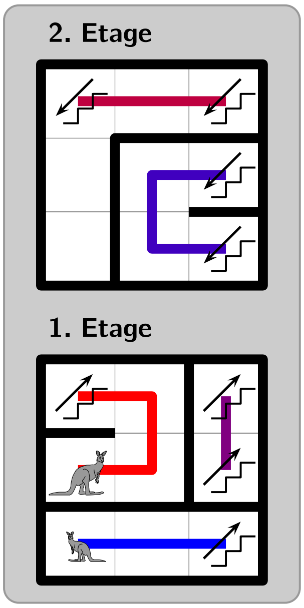
Seite 10: Das 4. Teil vervollständigt das Labyrinth so, dass es einen Weg von A nach B gibt:

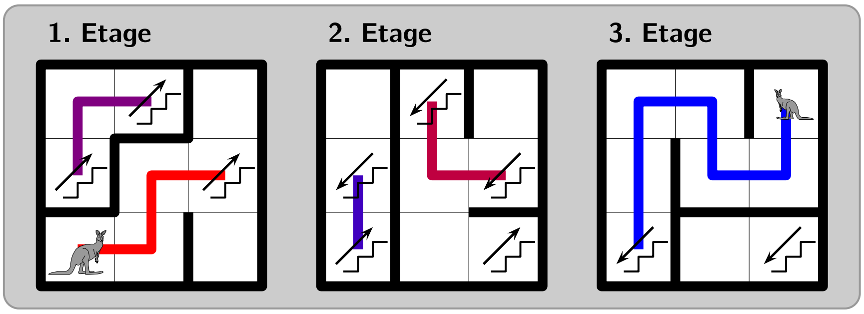


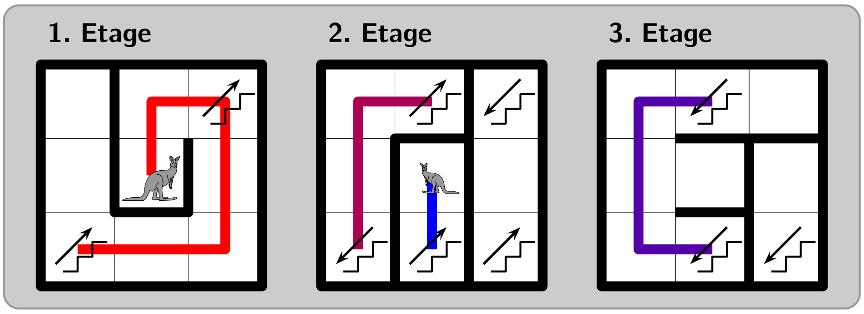
Seite 10: Von den beiden Punkten **3** und **4** kommt Emily aus dem Labyrinth heraus, wenn sie ihre rechte Hand an der Wand lässt. Von den Punkten **1**, **2** und **5** klappt das nicht. Rechts sind die Wände des Labyrinths rot und blau markiert. Der rote und der blaue Teil sind nicht miteinander verbunden. Wenn Emily also an einem der Punkte **1**, **2** oder **5** startet, so läuft sie stets an einer roten Wand entlang. Demzufolge kommt sie so nicht zum blauen Ausgang.



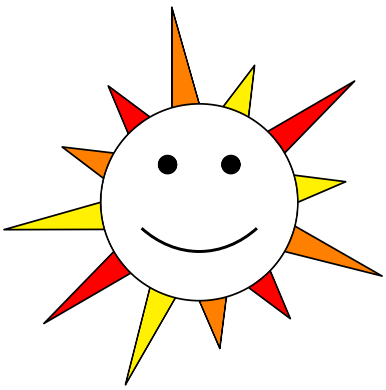
Seite 10: Wenn die Känguru-Mutter den Wegen von rot nach blau folgt, kommt sie zu ihrem Jungen.

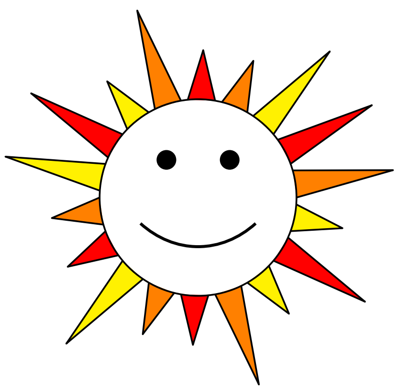




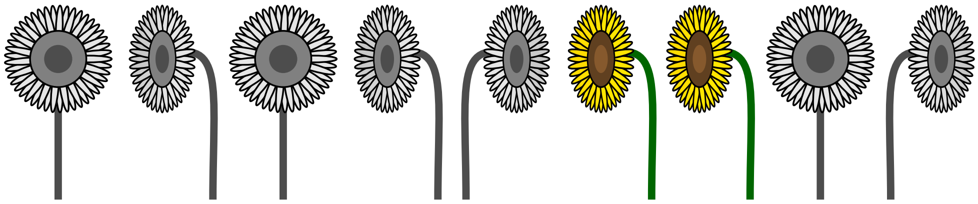


Seite 11: So sehen die fertig ausgemalten bunten Sonnenstrahlen aus:

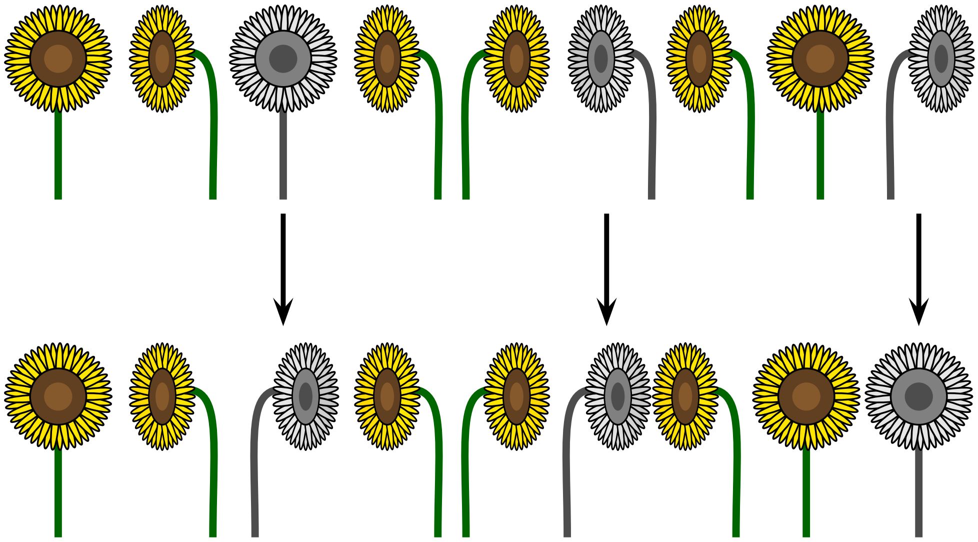




Seite 11: Nur die 2 bunt gefärbten Sonnenblumen neigten sich in dieselbe Richtung wie eine zu ihr benachbarte.

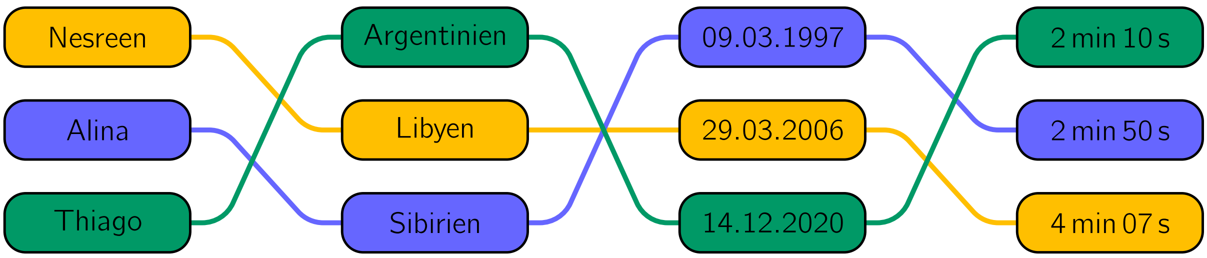


Die 1., 2., 4., 5., 7. und 8. Sonnenblume von links (im Bild bunt gefärbt) neigen sich heute in dieselbe Richtung wie gestern. Von ihnen neigen sich 3 nach links (die 2., die 4. und die 7.), 2 nach vorn (die 1. und die 8.) und 1 nach rechts (die 5.). Da von allen 9 Sonnenblumen heute sich 3 nach links, 3 nach vorn und 3 nach rechts neigen, müssen sich von den drei Sonnenblumen, die ihre Richtung über Nacht gewechselt haben, nun 1 nach vorn und 2 nach rechts neigen. Da sich die 9. Sonnenblume gestern nach rechts geneigt hat und über Nacht ihre Richtung gewechselt hat, muss sie sich jetzt nach vorn neigen. Die 3. und 6. Sonnenblume neigen sich folglich nach rechts (siehe untere Reihe).

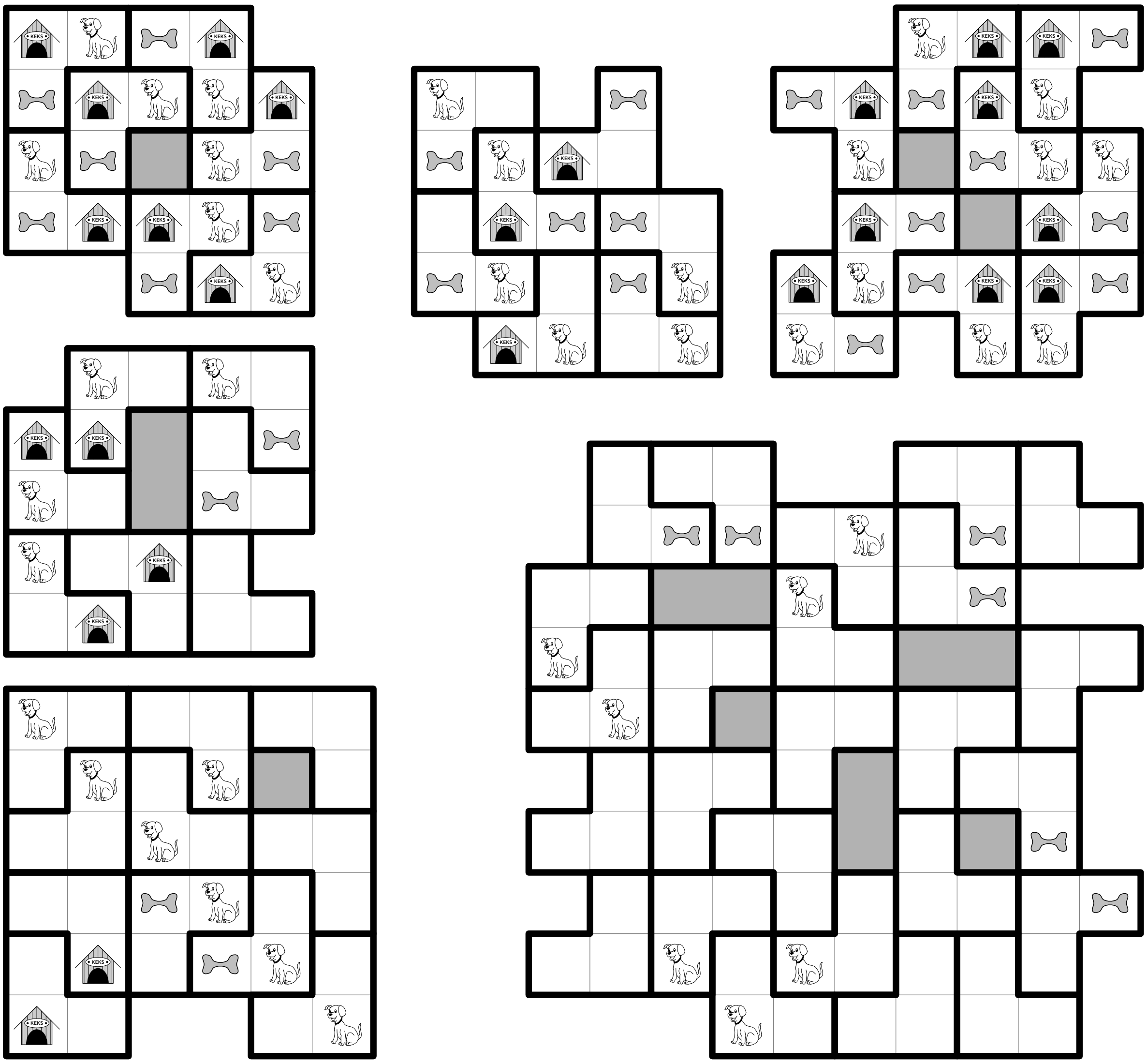


Nun neigen sich die 4 im nächsten Bild bunt gefärbten Sonnenblumen in dieselbe Richtung wie eine zu ihr benachbarte.

Seite 11: Die gleichfarbigen Informationen gehören jeweils zusammen:



Seite 12: Die Lösungen der Hundelogik sind:



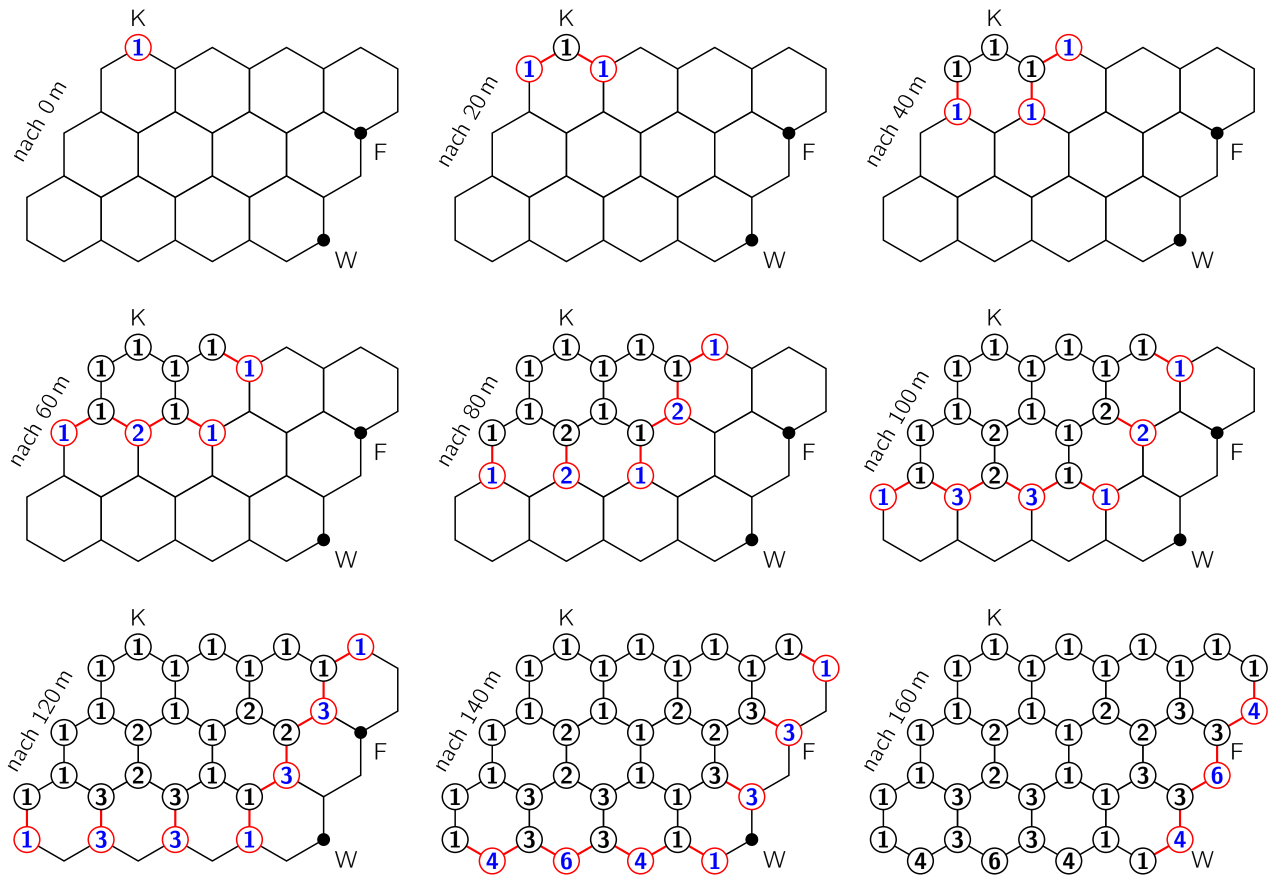
Seite 13: Diese Schatzsuche können wir auf zwei verschiedene Weisen lösen.

Möglichkeit 1: Da Milena nur Münzen gesammelt hat, muss Samuel von ihr eine Münze nehmen. Roman hat nur Münzen und Kelche gesammelt. Also muss Samuel, da er schon eine Münze genommen hat, von ihm einen Kelch nehmen. Mit denselben Argumenten finden wir nacheinander heraus, dass Samuel von Tristan einen Diamanten, von Sarah den Schlüssel und von Sina einen Ring nehmen muss.

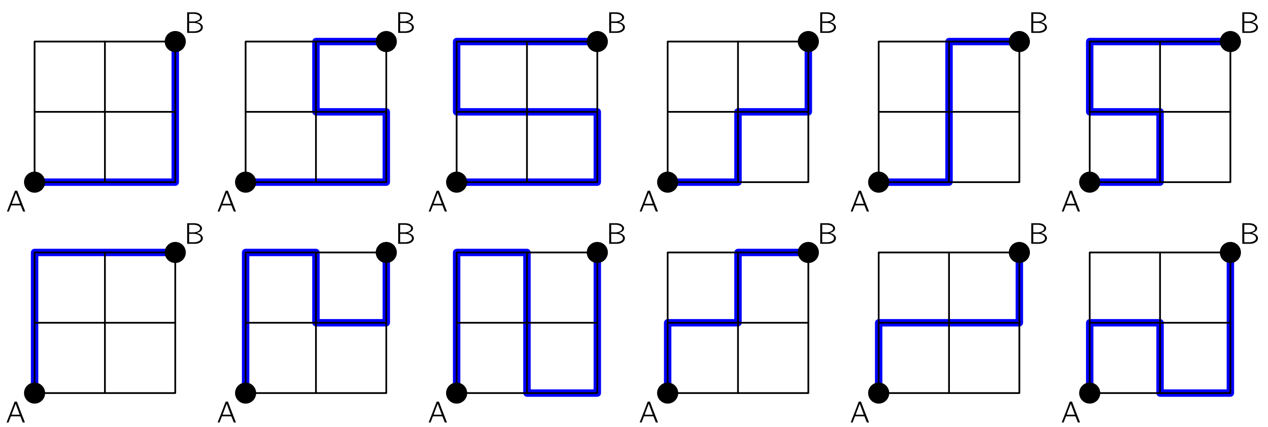
Möglichkeit 2: Da Sina die einzige ist, die schon Ringe gesammelt hat, muss Samuel von ihr einen Ring nehmen. Von den anderen Freunden ist Sarah die einzige mit einem Schlüssel. Also muss Samuel von ihr den Schlüssel nehmen. Mit denselben Argumenten finden wir nacheinander heraus, dass Samuel von Tristan einen Diamanten, von Roman einen Kelch und von Milena eine Münze nehmen muss.

<u>*Seite 13*</u>: **Wege finden**

Wir starten beim Königinnenpalast und erkunden schrittweise, welche Eckpunkte der Sechsecke wir nach 20 m, 40 m, 60 m, usw. zum ersten Mal erreichen können. Gleichzeitig zählen wir mit, auf wie viele Weisen ein solcher Eckpunkt auf kürzestem Weg erreichbar ist.
Da wir die Flugschule nach 140 m zum ersten Mal erreichen, ist das die Länge der kürzesten Route dorthin, und es gibt 3 verschiedene Wege mit dieser Länge. Analog sind es vom Königinnenpalast bis zum Wachsfigurenkabinett 160 m, und es gibt 4 verschiedene Wege mit dieser Länge. Um einen solchen Weg zu finden, gehen wir vom Ziel Bild für Bild rückwärts und nehmen jedes Mal einen der rot markierten Wege.



Wir malen die Wege systematisch auf. Wir gehen zuerst eine Quadratseite nach rechts. Der nächste Schritt kann dann entweder nach rechts oder nach oben erfolgen. So finden wir jeweils 3, also zusammen 6 Wege. Gehen wir zuerst eine Quadratseite nach oben, so finden wir wieder 6 Wege. Insgesamt gibt es 12 Wege von A nach B, die an keinem Punkt mehrfach vorbeikommen.



3 Bei jedem Hüpfer landet Lena auf einer Zahl, die um 1 oder um 2 größer ist. Die Zahl im Zielfeld ist um $5-1=4$ größer als die Zahl im Startfeld. Die 4 lässt sich auf drei Weisen als Summe von 1en und 2en schreiben, wenn die Reihenfolge der Summanden egal ist: $4=2+2=2+1+1=1+1+1+1$. Die Reihenfolge ist hier aber wichtig. Bei der Summe $2+2$ führt das Vertauschen der Summanden zu nichts Neuem, ebenso wenig bei $1+1+1+1$. Aber bei $2+1+1$ erhalten wir zusätzlich $1+2+1$ und $1+1+2$. Somit ergeben sich die folgenden 5 Wege für Lena, so von der 1 zur 5 zu hüpfen:

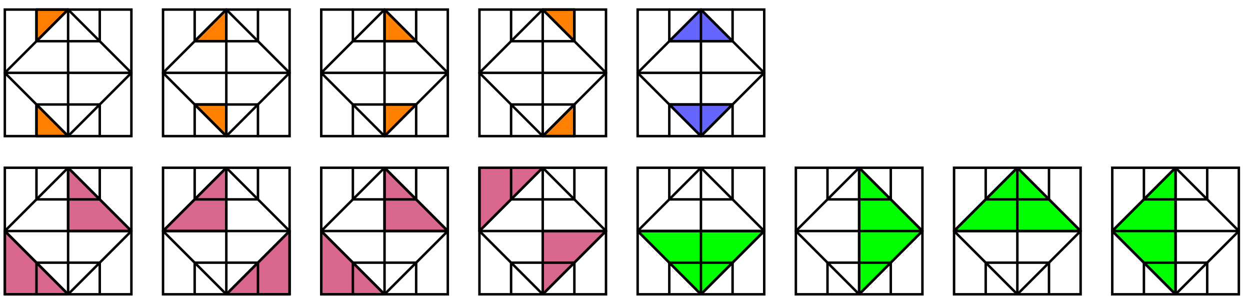
1-3-5,
1-3-4-5, 1-2-4-5, 1-2-3-5,
1-2-3-4-5.

Die Zahl im Zielfeld beim Spielfeld mit zwei Quadraten mehr ist um $7-1=6$ größer als die Zahl im Startfeld. Nun müssen wir 6 als Summe von 1en und 2en schreiben: $6=2+2+2=2+2+1+1=2+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1$. Für $2+2+2$ und $1+1+1+1+1+1$ gibt es wieder nur eine Möglichkeit. Für $2+2+1+1$ kommen noch fünf dazu: $2+1+2+1=2+1+1+2=1+2+2+1=1+2+1+2=1+1+2+2$. Für $2+1+1+1+1$ kommen noch vier dazu: $1+2+1+1+1=1+1+2+1+1=1+1+1+2+1=1+1+1+1+2$. Jetzt gibt es insgesamt 13 Wege für Lena, so von der 1 zur 7 zu hüpfen:

1-3-5-7,
1-3-5-6-7, 1-3-4-6-7, 1-3-4-5-7, 1-2-4-6-7, 1-2-4-5-7, 1-2-3-5-7,
1-3-4-5-6-7, 1-2-4-5-6-7, 1-2-3-5-6-7, 1-2-3-4-6-7, 1-2-3-4-5-7,
1-2-3-4-5-6-7.

Seite 19: Willy schreibt 5 Zahlen (aus 3en und 5en) auf, deren Summe 2021 ist. Die Summe der Einer muss also auf 1 enden. Das geht nur mit zwei 3en und drei 5en. Es entsteht ein Übertrag von 2. Die Summe der Zehner plus 2 muss demzufolge auf 2 enden. Also endet die Summe der Zehner auf 0. Dafür gibt es zwei Möglichtkeiten: zwei 5en und vier 5en. Im ersten Fall kann es nur zwei Hunderter geben. Die Summe wäre also höchstens $500+500+50+50+21=1121$. Also gibt es als Zehner vier 5en und der Übertrag ist 2. Als Hunderter muss es dann eine 3 und drei 5en geben. Insgesamt hat Willy drei 3en und zehn 5en verwendet. Für die Summanden gibt es die folgenden vier Möglichkeiten: 3, 353, 555, 555, 555 oder 3, 355, 553, 555, 555 oder 5, 353, 553, 555, 555 oder 5, 355, 553, 553, 555.

Seite 20: Wir suchen systematisch nach Dreiecken, wir beginnen bei den kleinsten. Von den kleinsten Dreiecken gibt es 4 oben und 4 unten (orange). Von den nächstgrößeren Dreiecken gibt es 1 oben und 1 unten (blau). Von den nächstgrößeren Dreiecken gibt es 4 in den Ecken und 4 innen (lila). Und von den größten Dreiecken gibt 4 (grün). Insgesamt lassen sich $8+2+8+4=22$ Dreiecke im Bild finden.



<u>*Seite 22*</u>: Die Lösungen der Rechengitter sind:

1	+	3	=	**4**
+		+		
2	+	4	=	**6**
+		+		
6	+	5	=	**11**
=		=		
9		**12**		

9	+	8	+	6	=	**23**
+		+		+		
5	+	2	+	1	=	**8**
+		+		+		
7	+	4	+	3	=	**14**
=		=		=		
21		**14**		**10**		

1	×	3	×	5	=	**15**
+		×		+		
6	×	7	+	8	=	**50**
−		+		+		
2	+	4	+	9	=	**15**
=		=		=		
5		**25**		**22**		

6	×	3	=	**18**
×		+		
4	−	2	=	**2**
+		+		
1	+	5	=	**6**
=		=		
25		**10**		

9	×	8	+	1	=	**73**
×		−		×		
6	+	7	−	3	=	**10**
+		+		×		
2	×	5	+	4	=	**14**
=		=		=		
56		**6**		**12**		

5	−	4	+	6	=	**7**
+		×		+		
2	×	3	+	9	=	**15**
+		−		+		
1	×	8	×	7	=	**56**
=		=		=		
8		**4**		**22**		

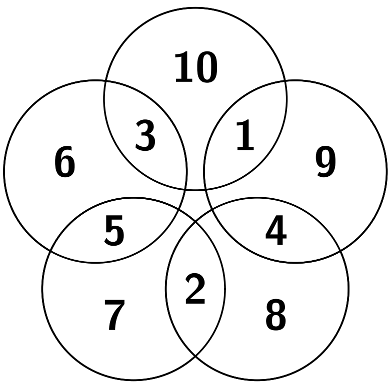
5	×	4	=	**20**
×		−		
6	÷	3	=	**2**
+		+		
2	−	1	=	**1**
=		=		
32		**2**		

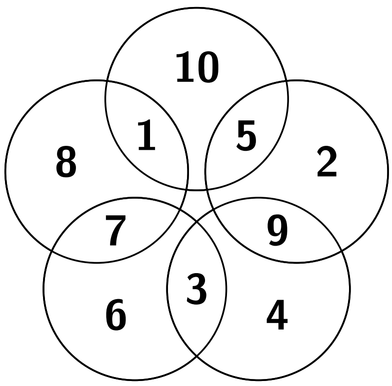
4	×	7	+	2	=	**30**
+		×		+		
9	÷	3	×	8	=	**24**
−		+		−		
1	+	6	−	5	=	**2**
=		=		=		
12		**27**		**5**		

2	×	5	×	3	=	**30**
+		×		×		
7	+	6	−	8	=	**5**
+		−		÷		
1	+	9	+	4	=	**14**
=		=		=		
10		**21**		**6**		

<u>*Seite 23*</u>: **Magische Zahlenkreise I**

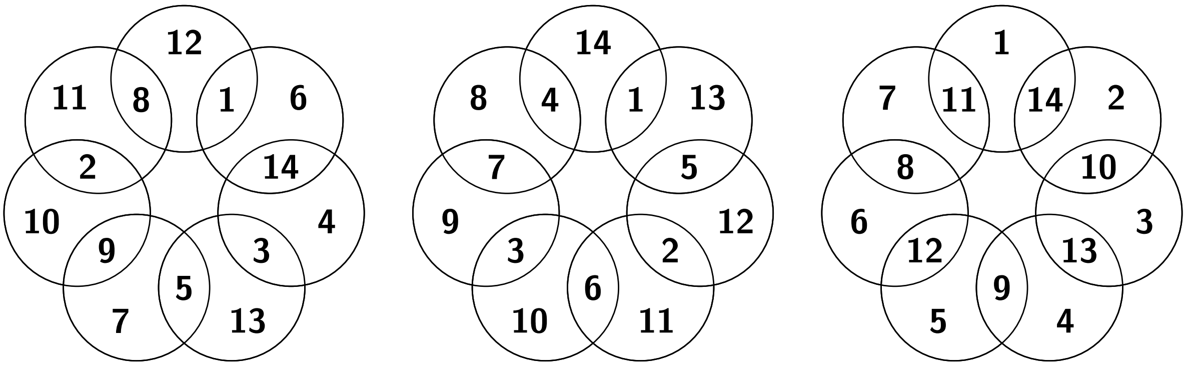
Die Abbildungen zeigen die fertig ausgefüllten Zahlenkreise. Beim rechten Zahlenkreis ist die Summe der Zahlen in jedem Kreis gleich 16. Die Lösung ist jeweils eindeutig.





<u>Seite 23</u>: **Magische Zahlenkreise II**

Die linke Abbildung zeigt den fertig ausgefüllten Zahlenkreis, bei dem die Summe der Zahlen in jedem Kreis gleich 21 ist. Bis auf Drehung und Spiegelung, gibt es für die Zahlenkreise, bei denen die Summe der Zahlen in jedem Kreis gleich 19 oder 26 ist, jeweils 7 Möglichkeiten. Beim Finden der Lösung ist zu beachten, dass bei der Summe 19 in den Feldern, die zu zwei Kreisen gehören, die Zahlen von 1 bis 7 sind, und bei der Summe 26 die Zahlen von 8 bis 14. Es ist jeweils eine Möglichkeit abgebildet.



Die anderen Möglichkeiten sind (im Uhrzeigersinn, im oberen Kreis beginnend) für die Summe 19:

14-1-11-7-9-3-10-6-8-5-12-2-13-4, 14-1-12-6-8-5-11-3-9-7-10-2-13-4, 14-1-13-5-8-6-11-2-10-7-9-3-12-4,

14-2-10-7-8-4-9-6-12-1-13-5-11-3, 14-2-10-7-11-1-13-5-8-6-9-4-12-3, 14-2-12-5-13-1-11-7-8-4-9-6-10-3.

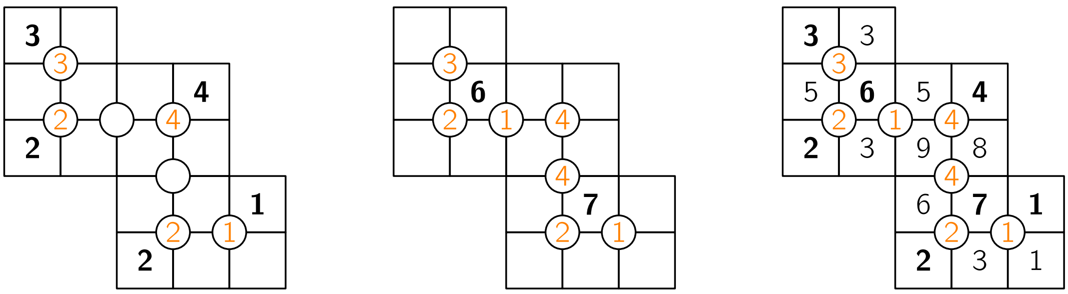
Und für die Summe 26:

1-14-4-8-6-12-5-9-7-10-3-13-2-11, 1-14-3-9-7-10-4-12-6-8-5-13-2-11, 1-14-2-10-7-9-4-13-5-8-6-12-3-11,

1-13-5-8-7-11-6-9-3-14-2-10-4-12, 1-13-5-8-4-14-2-10-7-9-6-11-3-12, 1-13-3-10-2-14-4-8-7-11-6-9-5-12.

<u>Seite 24</u>: **Zettelwirtschaft**

Wir versuchen zunächst herauszufinden, welche Anzahl an Notizzetteln an den einzelnen Stellen hängen. Wir notieren diese Anzahlen jeweils an den Mittelpunkten der Zettel (orange). Die Position der Zettel, die bei der 3, der 4, den beiden 2en und der 1 gezählt werden, ist eindeutig bestimmt (linkes Bild). Die Mittelpunkte der Zettel, die bei der 6 gezählt werden, liegen jeweils auf einem der Eckpunkte des Feldes, in dem die 6 steht. Der Eckpunkt oben rechts kann nicht der Mittelpunkt eines Zettels sein, da er am Rand liegt. Das heißt, der Eckpunkt unten rechts ist der Mittelpunkt von $6-3-2=1$ Zettel (mittleres Bild). Mit der gleichen Überlegung finden wir, dass der obere linke Eckpunkt des Feldes, in dem die 7 steht, der Mittelpunkt von $7-2-1=4$ Zetteln ist (mittleres Bild). Nun lassen sich die Zahlen in die restlichen Felder eintragen. In jedes Feld gehört die Summe der Zahlen, die wir an ihre Ecken geschrieben haben (rechtes Bild).



<u>*Seite 24*</u>: **Hoch gewinnt**

a) Damit die Zahl durch 5 teilbar ist, muss die 0 hinten stehen. Ansonsten wählen wir die größten Karten und sortieren absteigend. Die Lösung ist 87640.

b) Wir wählen zunächst die 9 als erste Ziffer. Dann kann aber die 8 nicht die zweite Ziffer sein, da die Quersumme sonst nicht durch 3 teilbar ist. Die Lösung ist 97764.

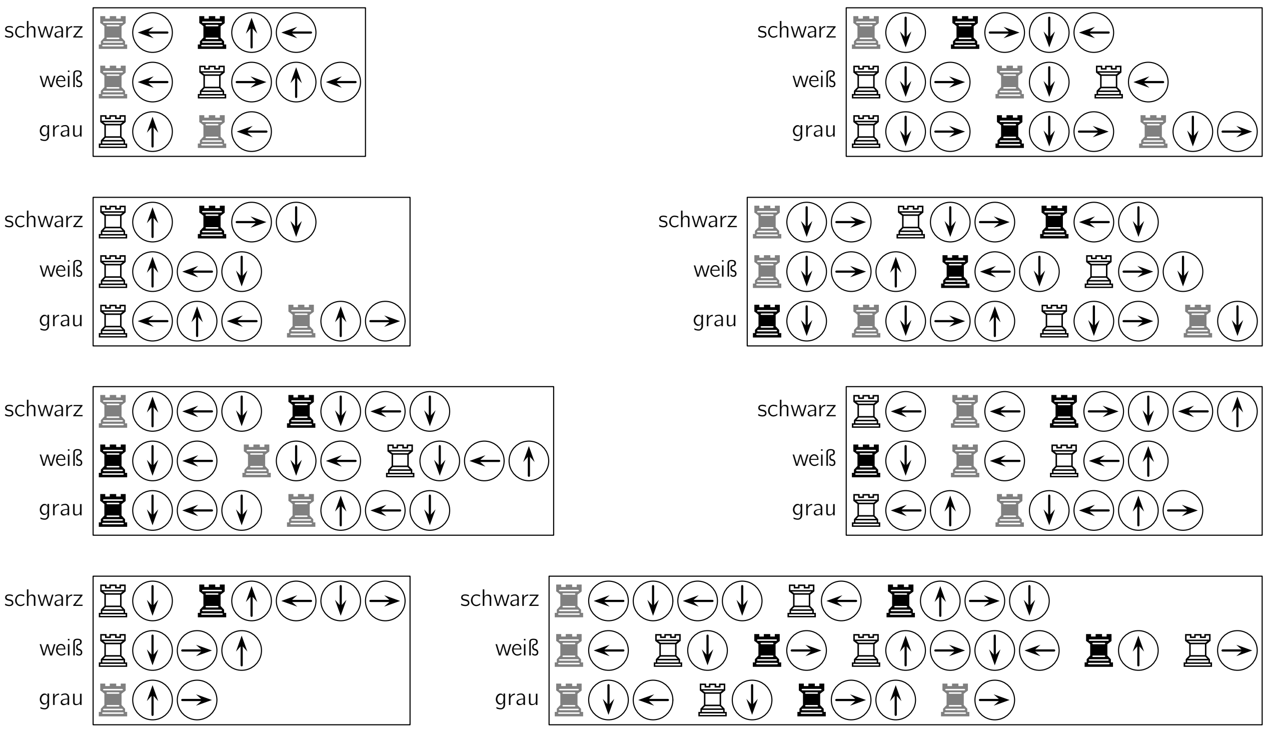
c) Damit die Zahl durch 24 teilbar ist, muss sie durch 3 und durch 8 teilbar sein. Die Ziffern aus b) eignen sich also bereits, wir müssen jedoch so sortieren, dass die Zahl auch durch 8 teilbar ist. Dafür reicht es, dass die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist. Die Lösung ist 94776.

d) Die alternierende Quersumme muss durch 11 teilbar sein. Wir probieren mit der 9 und 8 als erste Ziffern und kommen auf die Lösung 98461.

<u>*Seite 24*</u>: **45**

Damit die Zahl durch 45 teilbar ist, muss sie durch 5 und durch 9 teilbar sein. Die letzte Ziffer muss also eine 0 sein, und die Quersumme durch 9 teilbar sein. Deswegen brauchen wir mindestens drei 6en. Das kleinste legbare Vielfache von 45 ist 6660. Die nächstgrößeren Zahlen sind 60660, 66060 und 66600.

<u>*Seite 25*</u>: Wir geben jeweils eine Zugabfolge an, wie der schwarze, der weiße bzw. der graue Turm mit der kleinstmöglichen Anzahl an Zügen auf das Kreuz gezogen werden kann – erst die 6 kleinen, dann die 2 großen.



<u>*Seite 29*</u>: Mit 2 × 3-Rechtecken lassen sich alle Anzahlen außer 1 bis 5 und 7 überdecken. 1 bis 5 gehen nicht, da ein Rechteck schon 6 Kästchen überdeckt. 7 geht nicht, da ein Rechteck nicht ausreicht und ein zweites Rechteck nicht so gelegt werden kann, dass sich die beiden Rechtecke in 5 Kästchen überlappen.

Mit 3 × 4-Rechtecken lassen sich alle Anzahlen außer 1 bis 11, 13, 14 und 17 überdecken.

Mit 3 × 5-Rechtecken lassen sich alle Anzahlen außer 1 bis 14, 16, 17 und 19 überdecken.

Mit 3 × 6-Rechtecken lassen sich alle Anzahlen außer 1 bis 17, 19, 20, 22 und 23 überdecken.

Mit 5 × 7-Rechtecken lassen sich alle Anzahlen außer 1 bis 34, 36 bis 39, 41, 43 und 44 überdecken.

Seite 30: Die Maximalpunktzahl, die man beim Koala-Wettbewerb erzielen kann, erhält man, wenn man alle 20 Aufgaben richtig beantwortet. Dafür gibt es $20 \cdot 7$ Punkte $= 140$ Punkte.
Nun suchen wir die kleinste positive Zahl, die nicht als Summe von maximal 20 Summanden geschrieben werden kann, wobei jeder Summand entweder 7 oder -4 ist. Wir notieren als erstes, wie die Punktzahlen von 1 bis 7 entstehen können:

$$1 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) \qquad 2 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-4) \qquad 3 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot (-4) \qquad 4 = 4 \cdot 7 + 6 \cdot (-4)$$
$$5 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-4) \qquad 6 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot (-4) \qquad 7 = 1 \cdot 7 + 0 \cdot (-4)$$

Bei jeder dieser Summen werden höchstens 10 Summanden benötigt. Das heißt, dass man bei jeder dieser Summen eine, zwei, drei, ..., zehn weitere 7en addieren kann, und dabei die Anzahl der Summanden immer noch höchstens 20 ist. Folglich lassen sich alle Punktzahlen von $1 + 1 \cdot 7 = 8$ bis $7 + 10 \cdot 7 = 77$ erreichen. Und des Weiteren, da bei 1 nur 8, bei 2 nur 5 und bei 3 nur 2 Summanden nötig sind, auch $1 + 11 \cdot 7 = 78$, $2 + 11 \cdot 7 = 79$ und $3 + 11 \cdot 7 = 80$. Die 81 kann nicht als Punktzahl erzielt werden: Da 81, $81 + 1 \cdot 4 = 85$, ..., $81 + 5 \cdot 4 = 101$ allesamt nicht durch 7 teilbar sind, müssten mindestens 6 Aufgaben falsch beantwortet werden. Dann gibt es aber höchstens $14 \cdot 7 + 6 \cdot (-4) = 74$ Punkte.

Seite 31: Sandy schreibt 5 Zahlen (aus 5en und 9en) auf, deren Summe 2021 ist. Die Summe der Einer muss also auf 1 enden. Das geht nur mit vier 9en und einer 5. Es entsteht ein Übertrag von 4. Die Summe der Zehner plus 4 muss demzufolge auf 2 enden. Also endet die Summe der Zehner auf 8. Dafür gibt es zwei Möglichtkeiten: zwei 9en und zwei 5en oder nur zwei 9en. Im ersten Fall gäbe es 3 als Übertrag. Wir schaffen es aber nicht, mit den Hundertern die Summe 17 zu erzeugen. Also gibt es als Zehner nur zwei 9en und der Übertrag ist 2. Als Hunderter muss es dann zwei 9en geben. Insgesamt hat Sandy acht 9en und eine 5 verwendet. Die Summanden sind entweder 5, 9, 9, 999, 999 oder 9, 9, 9, 995, 999.

Seite 31: Damit das Produkt von 8 ganzen Zahlen gleich 8 ist, müssen es bis auf Vorzeichen entweder

- eine 8 und sieben 1en oder
- eine 4, eine 2 und sechs 1en oder
- drei 2en und fünf 1en sein.

Im ersten und dritten Fall ist die Summe ungerade, unabhängig davon, wie viele dieser Zahlen negativ sind. Nur im zweiten Fall können wir versuchen, Zahlen durch ihr Negatives zu ersetzen. Dabei muss die Anzahl der negativen Zahlen gerade sein, da ansonsten das Produkt gleich -8 wäre. Nur für die Zahlen $4, 2, 1, 1, 1, 1, -1, -1$ ist die Summe der 8 ganzen Zahlen ebenfalls gleich 8.

Seite 33: Die Münzen müssen so auf die Felder gelegt werden, dass in den einzelnen Zeilen 0, 2 und 6 Münzen und in den einzelnen Spalten 1, 3 und 4 Münzen liegen oder genau umgekehrt. Hier sind 5 Möglichkeiten dargestellt, wie die 8 Münzen auf die 9 Felder verteilt werden können.

0	0	0
0	2	0
1	1	4

0	0	0
0	1	1
1	2	3

0	0	0
0	0	2
1	3	2

0	0	0
1	1	0
0	2	4

0	0	0
1	0	1
0	3	3

Alle anderen Möglichkeiten entstehen dadurch, dass das Quadrat gedreht wird (Faktor 2) und/oder Zeilen untereinander vertauscht werden (Faktor 3!) und/oder Spalten untereinander vertauscht werden (Faktor 3!). Somit gibt es insgesamt $5 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 3! = 360$ verschiedene Möglichkeiten.