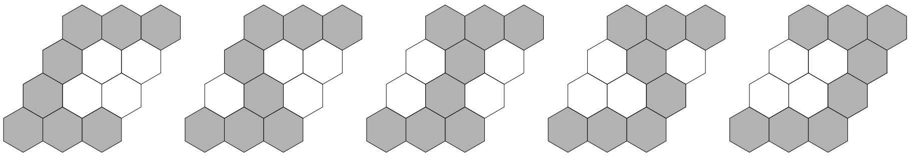
Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2020“ für die Klassenstufen 7 bis 13

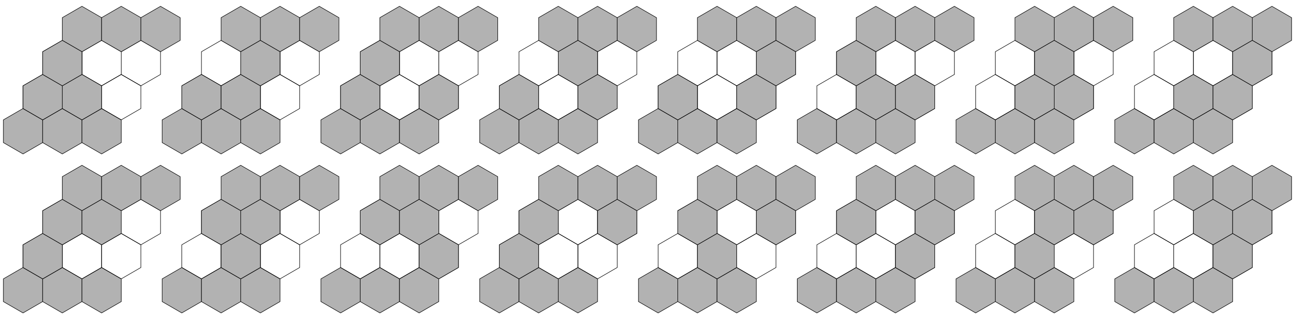
Seite 7: Damit die Zahl nach dem Runden am größten ist, muss wenn möglich aufgerundet werden. Dafür kommen nur die 10 000er, die 1 000er und die 10er Stelle in Frage. Die gerundeten Zahlen wären 2 410 000, 2 407 000 bzw. 2 407 620. Die größte Zahl erhalten wir also beim Runden auf die 10 000er Stelle.

Seite 8: Der erste Bus am Tag fährt um 7 Uhr, also zur vollen Stunde ab. Die Anzahl der Minuten, bis ein weiterer Bus zur vollen Stunde abfährt, ist sowohl durch 25 (Taktung) als auch durch 60 (volle Stunde) teilbar. Die Anzahl der Minuten, bis der nächste Bus zur vollen Stunde abfährt, ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 25 und 60, also 300. Die Busse fahren folglich alle 5 Stunden zur vollen Stunde ab, und zwar: um 7 Uhr, um 12 Uhr, um 17 Uhr und um 22 Uhr. Das sind 4 Busse.

Seite 10: Wenn zwei Sechsecke grau ausgemalt werden sollen, gibt es die folgenden 5 Möglichkeiten:



Wenn drei Sechsecke grau ausgemalt werden sollen, gibt es die folgenden 16 Möglichkeiten:



Seite 12: Die Lösungen der Sudokus sind:

△	◇	○	☆
☆	○	△	◇
◇	△	☆	○
○	☆	◇	△

V	VI	II	I	III	IV
III	IV	I	V	II	VI
I	II	III	IV	VI	V
IV	V	VI	III	I	II
VI	I	V	II	IV	III
II	III	IV	VI	V	I

W	Y	Z	U	X	V
U	V	X	W	Y	Z
Z	W	V	Y	U	X
X	U	Y	Z	V	W
V	Z	U	X	W	Y
Y	X	W	V	Z	U

Seite 12: Die Lösungen der Ziegelsudokus sind:

5	4	3	6	2	1
1	6	5	4	3	2
4	3	1	2	5	6
2	1	4	3	6	5
3	2	6	5	1	4
6	5	2	1	4	3

4	5	6	3	1	2
5	1	4	2	3	6
6	3	2	1	4	5
2	6	1	4	5	3
3	4	5	6	2	1
1	2	3	5	6	4

2	3	1	6	4	5
6	2	3	4	5	1
4	5	6	3	1	2
3	1	2	5	6	4
5	6	4	1	2	3
1	4	5	2	3	6

Seite 14: Die Lösungen der Nachfolger-Pfeile sind:

9	8	7
2	1	6
3	4	5

2	3	9
1	8	4
7	6	5

1	8	9
7	4	6
2	5	3

1	5	3
9	8	4
7	6	2

2	1	7	9
4	6	10	8
3	5	11	12

11	4	8	3
12	5	2	9
7	6	10	1

5	4	6	2
11	12	7	1
10	8	9	3

15	6	14	5
16	11	12	4
8	7	1	2
9	10	13	3

8	13	12	11
14	9	1	10
7	15	2	3
5	6	16	4

1	7	8	10
14	15	4	9
2	6	16	5
3	12	13	11

Seite 15: Jeder Monat hat entweder 28, 29 (Februar im Schaltjahr), 30 oder 31 Tage. In den jeweils ersten 28 Tagen eines Monats kommt jeder Wochentag genau 4 Mal vor. Die Wochentage der restlichen (0, 1, 2 oder 3) Tage in diesem Monat kommen also 5 Mal vor. In Monaten mit 29 Tagen ist das einer, in Monaten mit 30 Tagen sind das zwei und in Monaten mit 31 Tagen sind das drei.

Wir nummerieren die Wochentage der Reihenfolge nach mit 1 bis 7 und beginnen das Jahr mit Wochentag 1. Die folgende Tabelle zeigt, wie viele Tage die einzelnen Monate haben und welche Wochentage in den einzelnen Monaten 5 Mal vorkommen.

In einem Schaltjahr:

Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
$28+3$	$28+1$	$28+3$	$28+2$	$28+3$	$28+2$	$28+3$	$28+3$	$28+2$	$28+3$	$28+2$	$28+3$
1, 2, 3	4	5, 6, 7	1, 2	3, 4, 5	6, 7	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 1	2, 3, 4	5, 6	7, 1, 2

In einem Nicht-Schaltjahr:

Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
$28+3$	$28+0$	$28+3$	$28+2$	$28+3$	$28+2$	$28+3$	$28+3$	$28+2$	$28+3$	$28+2$	$28+3$
1, 2, 3		4, 5, 6	7, 1	2, 3, 4	5, 6	7, 1, 2	3, 4, 5	6, 7	1, 2, 3	4, 5	6, 7, 1

Im beiden Fällen gibt es 5 Monate in denen der Wochentag 1 genau 5 Mal vorkommt, die anderen Wochentage kommen 4 Mal oder 5 Mal vor. Es gibt also höchstens 5 Monate mit 5 Sonntagen.

Ist der 1. Januar ein Sonntag, so gibt es genau 5 Monate mit 5 Sonntagen. In einem Schaltjahr sind das die Monate Januar, April, Juli, September und Dezember. In einem nicht-Schaltjahr sind das die Monate Januar, April, Juli, Oktober und Dezember.

Seite 16: Hier sind drei Beispiele für Rechenaufgaben mit dem Ergebnis 2020:

$$1976 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 8 \qquad 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 5 - 6 - 1 \qquad 81 \cdot 25 + 9 + 3 - 7 - 6 - 4$$

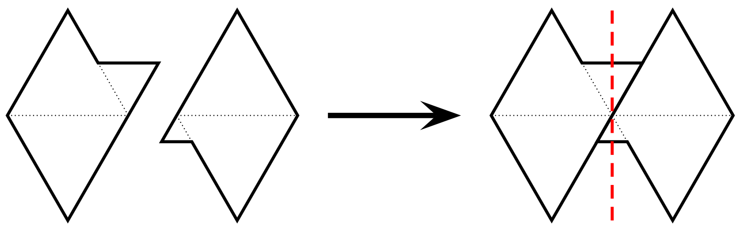
Seite 18: Da $AB \cdot B + BA \cdot A = 20 \cdot A \cdot B + A^2 + B^2$ gilt, ist die Endziffer dieselbe wie die Endziffer der Rechnung $A^2 + B^2$. Die folgende Tabelle zeigt, welche Endziffern Quadratzahlen haben können:

Endziffer von X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Endziffer von X^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

In der ersten Gleichung ist die Endziffer von $A^2 + B^2$ gleich 1. Dafür gibt es nur die folgenden Möglichkeiten: $A = 0,\ B = 1$ oder $A = 0,\ B = 9$ oder $A = 4,\ B = 5$ oder $A = 5,\ B = 6$ oder jeweils umgedreht. Setzen wir das in die Rechnung ein, so erhalten wir nur für $A = 4,\ B = 5$ (bzw. $A = 5,\ B = 4$) als Ergebnis 441.

In der zweiten Gleichung ist die Endziffer von $A^2 + B^2$ gleich 4. Dafür gibt es nur die folgenden Möglichkeiten: $A = 0,\ B = 2$ oder $A = 0,\ B = 8$ oder $A = 3,\ B = 5$ oder $A = 5,\ B = 7$ oder jeweils umgedreht. Setzen wir das in die Rechnung ein, so erhalten wir nur für $A = 5,\ B = 7$ (bzw. $A = 7,\ B = 5$) als Ergebnis 774.

Seite 19: Drehen wir das rechte Puzzleteil um 180° und schieben die beiden Teile dann zusammen, so hat die entstandene Figur eine senkrechte Spiegelachse.



Seite 21: Das Quadrat lässt sich auf eindeutige Weise wie gewünscht ausfüllen:

3	1	9	7
3	8	6	3
9	2	4	5
5	9	1	5

Seite 24:

1 Das Kopfgeld auf Tom sei T Dollar. Dann ist das Kopfgeld auf George gleich $T + 1000$ Dollar. Das Kopfgeld auf John ist zum einen gleich $3 \cdot (T + 1000)$ Dollar und anderen gleich $5 \cdot T$ Dollar. Daraus folgt $3T + 3000 = 5T$ und somit $T = 1500$. Auf Tom sind also 1500 Dollar, auf George 2500 Dollar und auf John 7500 Dollar ausgesetzt.

2 Von den kontrollierten Pferden wurden $100\,\% - 85\,\% = 15\,\%$ **mit erlaubter Geschwindigkeit**, $100\,\% - 80\,\% = 20\,\%$ **mit Sattel** und $100\,\% - 75\,\% = 25\,\%$ nur **mit gesichertem Gepäck** durch den Ort geritten. Der kleinstmögliche Anteil der kontrollierten Pferde, die zu schnell und ohne Sattel und mit ungesichertem Gepäck durch den Ort geritten wurden, kommt vor, wenn in den **drei** oben erwähnten Gruppen alles verschiedene Pferde sind. Dann wären es $100\,\% - (15\,\% + 20\,\% + 25\,\%) = 40\,\%$ der kontrollierten Pferde.

3 Wir bezeichnen mit x die Entfernung in Meilen zwischen dem Haus von Joe und dem Haus von Maurice. Dann ist die Entfernung zwischen dem Haus von Joe und dem Saloon $9 - x$ Meilen und die Entfernung zwischen dem Haus von Maurice und dem Saloon $6 - x$ Meilen. Da laut Billy zwei der Teilstrecken gleich lang sind, ist entweder $x = 6 - x$ oder $x = 9 - x$ (die beiden anderen Teilstrecken können nicht gleich lang sein, da sie sich um 3 Meilen unterscheiden). Im ersten Fall ($x = 3$) betragen die Längen der drei Entfernungen 6, 3 und 3 Meilen und im zweiten Fall ($x = 4{,}5$) betragen sie 4,5, 4,5 und 1,5 Meilen. Im ersten Fall würden die drei Wegpunkte auf einer Geraden liegen ($3 + 3 = 6$), was sie aber nicht tun. Also trifft der zweite Fall zu, und die Rundtour wäre $4{,}5 + 4{,}5 + 1{,}5 = 10{,}5$ Meilen lang.

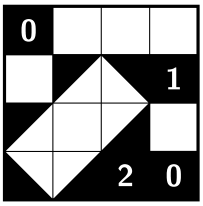
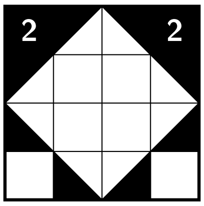
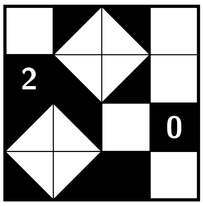
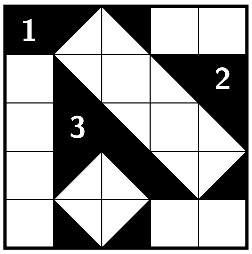
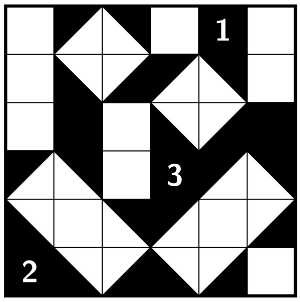
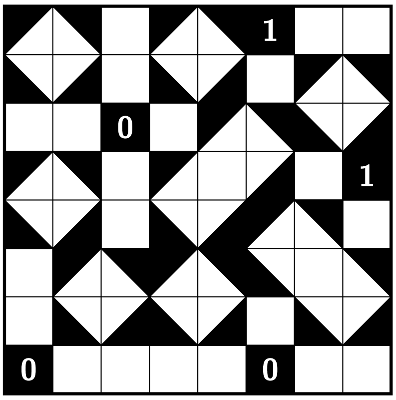
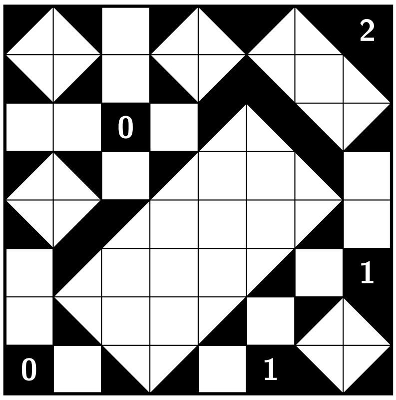
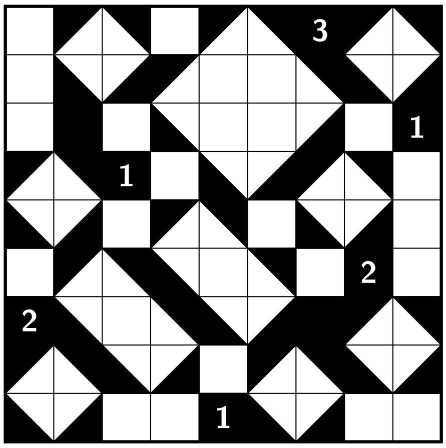
4 Rechts ist das vollständig ausgefüllte antimagische Quadrat abgebildet. Die Zeilensummen sind 30, 37, 33, 36; die Spaltensummen sind 31, 32, 35, 38; und die Diagonalensummen sind 34, 39.

4	5	7	14
6	13	3	15
11	12	9	1
10	2	16	8

Die Anzahl der braunen entlaufenen Rinder bezeichnen wir mit b. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das erste Rind, das zweite Rind und das dritte Rind, die Jack wieder einfängt, braun sind, ist gleich $\frac{b}{22} \cdot \frac{b-1}{21} \cdot \frac{b-2}{20} = \frac{b \cdot (b-1) \cdot (b-2)}{22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{1}{7}$.

Daraus folgt $b \cdot (b-1) \cdot (b-2) = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{7} = 22 \cdot 3 \cdot 20 = 12 \cdot 11 \cdot 10$ und somit $b = 12$. Jack sind also 12 braune Rinder und $22 - 12 = 10$ schwarze Rinder entlaufen.

<u>Seite 25</u>: So sehen die fertigen Rechteck-Mosaike aus:

<u>Seite 28</u>: Der Tanzlehrer hat Recht, und wir überlegen uns warum. Dafür nummerieren wir die Personen in der Reihe von links nach rechts mit 1 bis 24.

Wir schauen uns für die ersten 19 Personen in der Reihe an, wie viele Mädchen in dem 6er-Block sind, der mit dieser Person beginnt. Zum Beispiel zählen wir bei der 4. Person, wie viele Mädchen unter den Personen 4, 5, 6, 7, 8 und 9 sind. Ist eine dieser Zahlen gleich 3, bedeutet das, dass dieser Block aus 3 Mädchen und 3 Jungen besteht. Diesen Block könnte der Tanzlehrer also herausgreifen.

Wenn keiner dieser Zahlen gleich 3 wäre, so müssten alle Zahlen größer als 3 oder alle Zahlen kleiner als 3 sein, da sich die Anzahl der Mädchen in dem entsprechenden 6er-Block bei einem Schritt zur nächsten Person höchstens um 1 ändert. Dann wären auch die Zahlen bei den Personen 1, 7, 13 und 19 alle größer als 3 oder alle kleiner als 3. Die Summe dieser vier Zahlen wäre also entweder größer als 12 oder kleiner als 12. Das kann aber nicht sein, da diese Summe gerade die Gesamtanzahl der Mädchen in der Gruppe, also gleich 12 ist.