



Lösungen der Knobeleyen in „Mathe mit dem Känguru 2019“ für die Klassenstufen 7 bis 13

 Seite 8: Die einzige Lösung ist $A = 7, E = 2, H = 1, M = 8, T = 9$.
Die Rechnung lautet dementsprechend $87912 = 4 \cdot 21978$.

 Seite 9: Alle 2-stelligen und 4-stelligen Zahlen lassen sich höchstens auf eine Weise mit einem schwarzen und einem weißen Plättchen legen. Damit eine 3-stellige Zahl auf zwei Weisen gelegt werden kann, muss es folgende Plättchen geben:

1. ein schwarzes, auf dem nur die erste Ziffer der 3-stelligen Zahl steht,
2. ein weißes, auf dem die letzten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl in derselben Reihenfolge stehen,
3. ein schwarzes, auf dem die ersten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl in derselben Reihenfolge stehen und
4. ein weißes, auf dem nur die letzte Ziffer der 3-stelligen Zahl steht.

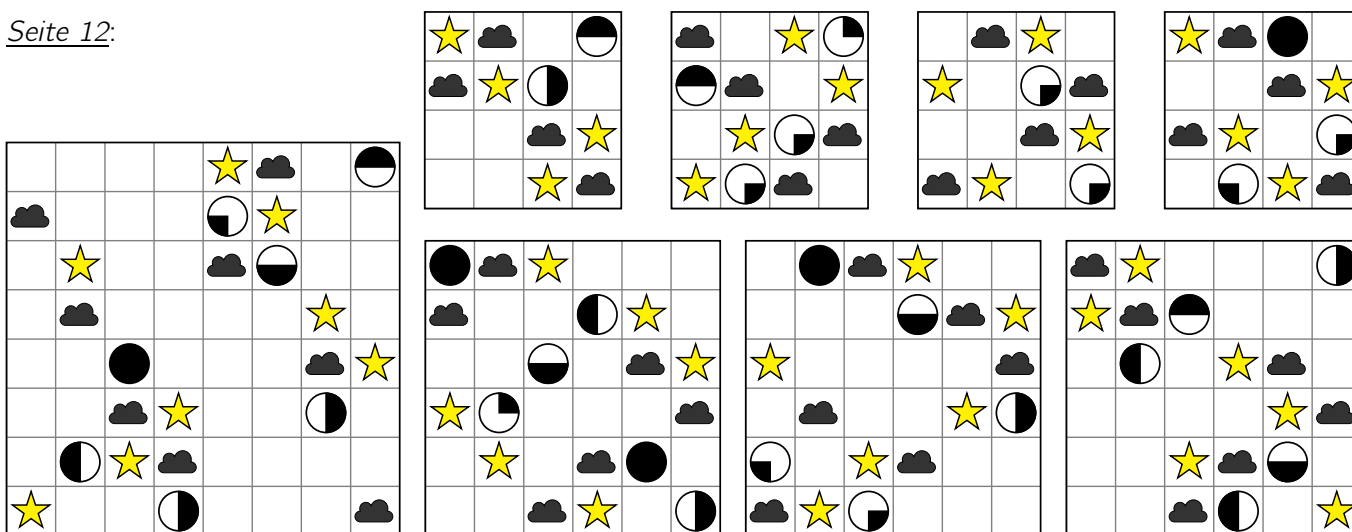
Die 4. Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die letzte Ziffer der 3-stelligen Zahl verschieden von 0 ist.

Damit 2. erfüllt ist, muss die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl gebildet wird, zwischen 10 und 20 sein. Daraus folgt, dass die mittlere Ziffer der 3-stelligen Zahl 1 ist.

Damit 3. erfüllt ist, muss die Zahl, die aus den ersten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl gebildet wird, zwischen 10 und 30 sein. Daraus folgt, dass die ersten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl entweder 11 oder 21 sind.

Die folgenden 18 Zahlen lassen sich auf 2 Weisen legen: 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219.

Seite 12:



Seite 13: Kunterbunte Eissvielfalt: In der oberen Reihe sind 3 kleine Eisschalen mehr und 2 große Eisschalen weniger als in der unteren Reihe. Also sind 3 kleine Eisschalen genauso breit wie 2 große. Ersetzen wir die 6 großen Eisschalen durch 9 kleine, so haben wir das Maximum von 12 kleinen Eisschalen erreicht. Ersetzen wir hingegen die 3 kleinen Eisschalen durch 2 große, so haben wir das Maximum von 8 großen Eisschalen erreicht.

Wir bezeichnen die großen Eisschalen mit **g** und die kleinen mit **k**. In der untersten Reihe können 0, 2 oder 4 große Eisschalen sein. Für 0 und 4 gibt es nur die beiden Varianten **kkkkkk** und **gggg**. Für 2 große Eisschalen gibt es 10 Möglichkeiten: **ggkkk, gkgkk, gkkgk, gkkkg, kggkk, kgkkg, kgkkg, kkgkk, kkgkg, kkkgg**. Rechnerisch können wir uns auch überlegen, dass wir die Positionen der großen Eisschalen auswählen müssen. Dafür gibt es $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es 12 Möglichkeiten für die untere Reihe.

In der oberen Reihe gibt es genauso viele. Da wir die Auslagen in der oberen und der unteren Reihe beliebig kombinieren können, gibt es für die gesamte Auslage $12 \cdot 12 = 144$ Möglichkeiten.

Cäsars Eissorten: Das sind die gesuchten Eissorten (die Zahl gibt an, um wie viele Buchstaben verschoben wurde): VANILLE (1), SCHOKOLADE (25), ERDBEERE (13), HASELNUSS (3), STRACCIATELLA (3), HIMBEERE (23), MANGO (5), JOGHURT (5).

Die schrägen Zahlen aus Pisa: Da ab dem 3. Folgenglied jedes Folgenglied als Summe der beiden Vorgänger gebildet wird, ist die Folge ab dem 3. Folgenglied wachsend.

(a) Der Vorgänger von 49 ist eine Zahl zwischen 1 und 48. Ihr Nachfolger ist folglich eine Zahl zwischen $1 + 49 = 50$ und $48 + 49 = 97$. Und dessen Nachfolger ist zwischen $49 + 50 = 99$ und $49 + 97 = 146$. Die Zahl danach ist auf jeden Fall mindestens $50 + 99 = 149$, also größer als 128. Zwischen 49 und 128 steht also genau eine Zahl in der Folge und das muss $128 - 49 = 79$ sein. Damit können wir die Folgenglieder vor der 49 berechnen: Es sind $79 - 49 = 30$, $49 - 30 = 19$, $30 - 19 = 11$, $19 - 11 = 8$ und davor $11 - 8 = 3$. Mit 3 und 8 als Startzahlen erhalten wir somit eine Folge, die 49 und 128 enthält. Gehen wir noch einen Schritt weiter zurück, so erhalten wir vor der 3 die Zahl $8 - 3 = 5$. Wir bekommen also auch mit den Startzahlen 5 und 3 (in dieser Reihenfolge) eine Folge, die 49 und 128 enthält.

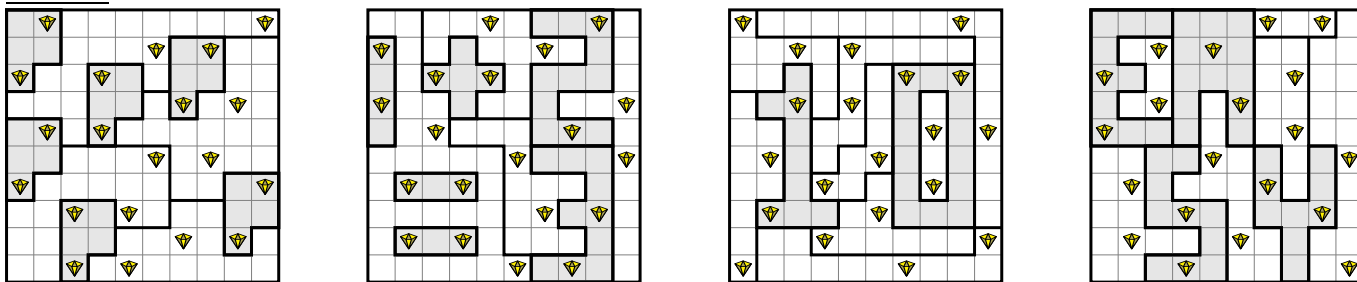
(b) Auf dieselbe Weise berechnen wir, dass zwischen 27 und 115 genau zwei Zahlen in der Folge stehen. Es sei x der Nachfolger von 27. Dann kommt danach $27 + x$ und dann $27 + 2x = 115$. Also ist $x = 44$ und die Folgenglieder vor der 27 sind $44 - 27 = 17$, $27 - 17 = 10$, $17 - 10 = 7$, $10 - 7 = 3$ und gegebenenfalls noch $7 - 3 = 4$. Mit den Startzahlen 3 und 7 bzw. 4 und 3 kommen in der Folge 49 und 115 vor.

(c) Auf dieselbe Weise berechnen wir, dass zwischen 11 und 215 genau fünf Zahlen in der Folge stehen. Es sei x der Nachfolger von 11. Dann sind die weiteren Folgenglieder $11 + x$, $11 + 2x$, $22 + 3x$, $33 + 5x$ und $55 + 8x = 215$. Also ist $x = 20$ und die Folgenglieder vor der 11 sind $20 - 11 = 9$, $11 - 9 = 2$ und gegebenenfalls noch $9 - 2 = 7$. Mit den Startzahlen 2 und 9 bzw. 7 und 2 kommen in der Folge 11 und 215 vor.

(d) Wir überlegen uns zunächst allgemein, wie die Folge aussehen würde. Sind die beiden Startzahlen beide k , so lautet die Folge $k, k, 2k, 3k, 5k, 8k, 13k, \dots$. Jedes Folgenglied ist also das k -fache der Fibonacci-Zahl an der gleichen Position. Wir müssen also herausfinden, welche Teiler von 2019 bzw. 1320 Fibonacci-Zahlen sind. $2019 = 3 \cdot 673$ hat nur die Teiler 1, 3, 673 und 2019. 2019 und 673 sind keine Fibonacci-Zahlen. Die 1 führt zu der Folge mit der Startzahl $2019 : 1 = 2019$. In dieser Folge kommt 2019 aber nicht „später“ vor. Also ist nur die 3 (die 4. Fibonacci-Zahl) von Interesse. Wählt man als Startzahlen zweimal $2019 : 3 = 673$, so ergibt sich die Folge $673, 673, 1346, 2019, \dots$. Die 2019 kommt in dieser Folge an der 4. Stelle vor.

$1320 = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11$. Das Aufschreiben der ersten 16 Fibonacci-Zahlen ergibt, dass die Teiler 2, 3, 5, 8 und 55 von 1320 Fibonacci-Zahlen sind (die 3., 4., 5., 6. und 10.) und zu Lösungen führen. Es gibt also 5 Möglichkeiten. Die entsprechenden Startzahlen sind $1320 : 2 = 660$, $1320 : 3 = 440$, $1320 : 5 = 264$, $1320 : 8 = 165$ und $1320 : 55 = 24$. Die 2019 kommt an der 3., 4., 5., 6. bzw. 10. Stelle der entsprechenden Folge vor.

Seite 14:



Seite 25:

