Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2019“ für die Klassenstufen 3 bis 8

Seite 4: Hier sind zwei mögliche Rechenaufgaben:

$1987 + 26 + 5 + 4 - 3 = 2019 \qquad 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + 6 - 5 + 3 - 2 + 1 = 2019$

Seite 5: Hier sind alle 8 Möglichkeiten. Übereinanderstehende Pyramiden sind jeweils zueinander gespiegelt.

1 4 3 6 2 5	2 5 3 6 1 4	3 1 4 5 6 2	3 2 5 4 6 1
1 3 4 5 2 6	2 3 5 4 1 6	3 4 1 2 6 5	3 5 2 1 6 4

Seite 6: Alle 2-stelligen und 4-stelligen Zahlen lassen sich höchstens auf eine Weise mit einem schwarzen und einem weißen Plättchen legen. Damit eine 3-stellige Zahl auf zwei Weisen gelegt werden kann, muss es folgende Plättchen geben:

1. ein schwarzes, auf dem nur die erste Ziffer der 3-stelligen Zahl steht,
2. ein weißes, auf dem die letzten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl in derselben Reihenfolge stehen,
3. ein schwarzes, auf dem die ersten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl in derselben Reihenfolge stehen und
4. ein weißes, auf dem nur die letzte Ziffer der 3-stelligen Zahl steht.

Die 4. Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die letzte Ziffer der 3-stelligen Zahl verschieden von 0 ist.

Damit 2. erfüllt ist, muss die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl gebildet wird, zwischen 10 und 20 sein. Daraus folgt, dass die mittlere Ziffer der 3-stelligen Zahl 1 ist.

Damit 3. erfüllt ist, muss die Zahl, die aus den ersten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl gebildet wird, zwischen 10 und 30 sein. Daraus folgt, dass die ersten beiden Ziffern der 3-stelligen Zahl entweder 11 oder 21 sind.

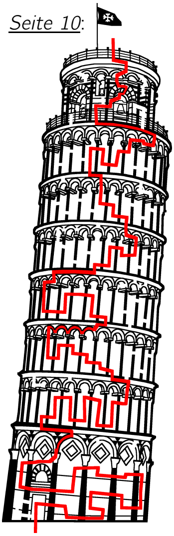
Die folgenden 18 Zahlen lassen sich auf 2 Weisen legen: 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219.

Seite 10: (a) Auf $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$ folgen $13 + 21 = 34$, $21 + 34 = 55$, $34 + 55 = 89$, $55 + 89 = 144$ und $89 + 144 = 233$.

(b) Da ab der 3. Zahl in der Folge jede Zahl als Summe der beiden Folgenglieder davor gebildet wird, werden die Zahlen ab der 3. Zahl immer größer. Wenn 49 in der Folge vorkommen soll, so muss ihr Vorgänger also eine Zahl zwischen 1 und 48 sein. Ihr Nachfolger ist folglich eine Zahl zwischen $1 + 49 = 50$ und $48 + 49 = 97$. Und danach kommt eine Zahl zwischen $49 + 50 = 99$ und $49 + 97 = 146$. Die Zahl danach ist auf jeden Fall mindestens $50 + 99 = 149$, also größer als 128. Zwischen der 49 und der 128 kommt also genau eine Zahl in der Folge vor und das muss $128 - 49 = 79$ sein. Damit können wir die Folge rückwärts weiter berechnen: Vor der 49 kommt die $79 - 49 = 30$, davor die $49 - 30 = 19$, davor die $30 - 19 = 11$, davor die $19 - 11 = 8$ und davor die $11 - 8 = 3$. Mit 3 und 8 als Startzahlen erhalten wir somit eine Folge, die 49 und 128 enthält. Gehen wir noch einen Schritt weiter zurück, so erhalten wir vor der 3 die Zahl $8 - 3 = 5$. Wir bekommen also auch mit den Startzahlen 5 und 3 (in dieser Reihenfolge) eine Folge, die 49 und 128 enthält.

(c) Auf dieselbe Weise wie bei (b) berechnen wir, dass zwischen 27 und 115 genau zwei Zahlen in der Folge stehen. Wäre 28 der Nachfolger von 27, so wären die nächsten beiden Zahlen 55 und 83. Erhöhen wir den Nachfolger von 27 schrittweise um 1, so erhöht sich die überübernächste Zahl um 2. Damit diese Zahl 115 ist, müssen wir 28 um $(115 - 83) : 2 = 32 : 2 = 16$ auf $28 + 16 = 44$ erhöhen. Die Vorgänger der 27 sind dann nacheinander $44 - 27 = 17$, $27 - 17 = 10$, $17 - 10 = 7$, $10 - 7 = 3$ und gegebenenfalls noch $7 - 3 = 4$. Mit den Startzahlen 3 und 7 bzw. 4 und 3 kommen in der Folge 49 und 115 vor.

Seite 10:



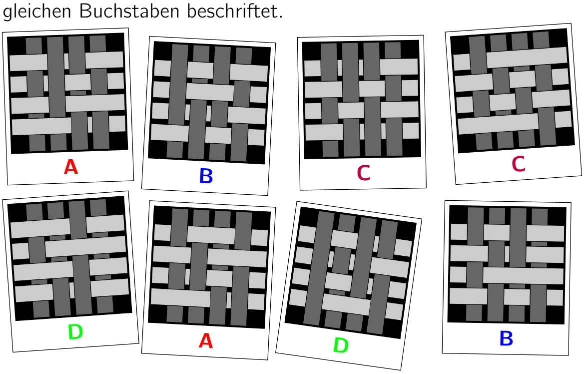
Seite 11: **Kunterbunte Eisvielfalt**: Ganz links sehen wir, dass 3 kleine Eisschalen genau so breit wie 2 große Eisschalen sind. In der oberen Reihe können wir 2 große Eisschalen durch 3 kleine ersetzen. In der unteren Reihe können wir 4 große Eisschalen durch 6 kleine ersetzen. Dann sind in der vollen Auslage nur kleine Eisschalen, insgesamt 18 kleine Eisschalen.
Umgekehrt könnten wir in der unteren Reihe die 3 kleinen Eisschalen durch 2 große ersetzen und in der oberen Reihe die 6 kleinen Eisschalen durch 4 große. Dann wären in der vollen Auslage nur große Eisschalen, insgesamt 12 große Eisschalen.
Ersetzt man schrittweise immer 2 große durch drei kleine Eisschalen, so kommt jeweils eine Eisschale, und damit auch eine Eissorte, dazu. Jede Anzahl von Eissorten zwischen 12 und 18 ist also möglich, das sind 7 verschiedene Möglichkeiten.

Cäsars Eissorten: Die gesuchten Eissorten sind HASELNUSS, STRACCIATELLA, HIMBEERE, MANGO, JOGHURT. Cleos Enkeltochter hat die folgenden Eissorten verschlüsselt (die Zahl gibt an, um wie viele Buchstaben verschoben wurde): VANILLE (6), SCHOKOLADE (13), ERDBEERE (20).

Pasta-Logik: Die Bestellungen trägt man am besten nach und nach in eine Tabelle ein, bis alle Bestellungen vollständig zugeordnet sind.

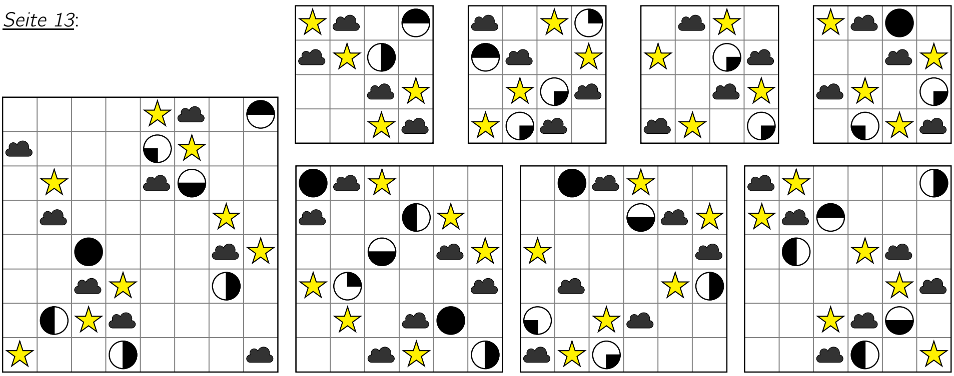
Amelie	Farfalle	Gorgonzola
Leif	Penne	Bolognese
Hanna	Orecchiette	Arrabiata
Willi	Spaghetti	Pesto
Dimitri	Makkaroni	Champignonsauce

Seite 12: Die Fotos, die dasselbe Muster zeigen, sind mit dem gleichen Buchstaben beschriftet.

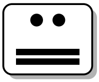


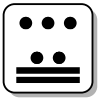
Seite 12: Die Pfeile zeigen auf die 7 Unterschiede im rechten Bild.

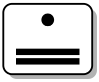
Seite 13:

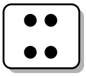


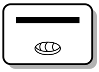
Seite 14: Zum Verbinden rechnen wir die Maya-Zahlen aus.

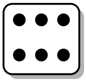
 $= 2 \cdot 20 + (2 \cdot 5) \cdot 1 = 50$

 $= 3 \cdot 20 + (2 \cdot 5 + 2) \cdot 1 = 72$

 $= 1 \cdot 20 + (2 \cdot 5) \cdot 1 = 30$

 $= 2 \cdot 20 + 2 \cdot 1 = 42$

 $= 5 \cdot 20 = 100$

 $= 3 \cdot 20 + 3 \cdot 1 = 63$

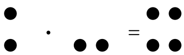
Vampirzahlen und Maya-Zahlen: Für die Vampirzahlen geben wir jeweils eine Lösung an.

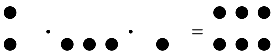
$153 = 3 \cdot 51$ $\qquad 688 = 8 \cdot 86$ $\qquad 1206 = 6 \cdot 201$

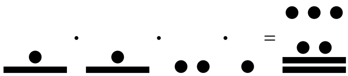
$1255 = 5 \cdot 251$ $\qquad 2187 = 27 \cdot 81$ $\qquad 6880 = 80 \cdot 86$

 $(6 \cdot 5 = 30)$

 $(5 \cdot 5 \cdot 2 = 50)$

 $(21 \cdot 2 = 42)$

 $(21 \cdot 3 \cdot 1 = 63)$

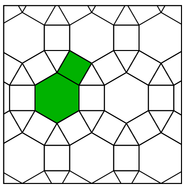
 $(6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 72)$

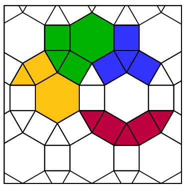
Seite 15: Die einzige Lösung ist $A = 7$, $E = 2$, $G = 1$, $L = 8$. Die Rechnung lautet dementsprechend $8712 = 4 \cdot 2178$.

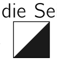
Seite 16: Im Bild links ist das zweite Achteck zu sehen. Im Bild rechts sind vier Neunecke zu sehen. Jedes Neuneck in dem Muster gleicht einem dieser vier Neunecke – kann aber verschoben, gedreht und/oder gespiegelt sein. Und von den Zehnecken gibt es noch viel mehr verschiedene Formen.

Seite 21: Im zusammengefalteten Würfel liegen sich die Seiten *A* und *F*, *B* und *D* sowie *C* und *E* gegenüber.

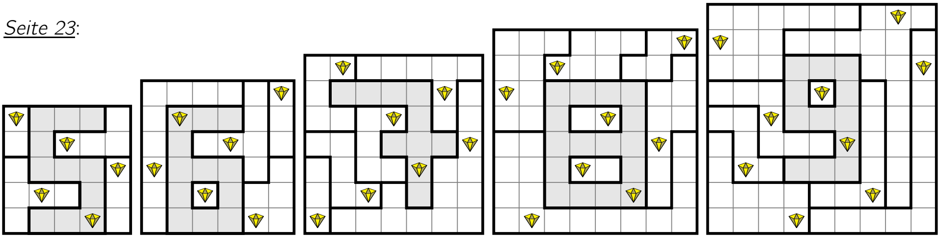
	A		
B	*C*	*D*	*E*
	F		





Damit man ein schwarzes Quadrat sieht, wenn man auf die Seite *B* oder *D* schaut, muss im Netz entweder auf *B*  und auf *D*  oder auf *B*  und auf *D*  zu sehen sein oder umgekehrt.
Dasselbe gilt für die Seiten *C* und *E*.
Damit man ein schwarzes Quadrat sieht, wenn man auf die Seite *A* oder *F* schaut, muss im Netz entweder auf *A*  und auf *F*  oder auf *A*  und auf *F*  zu sehen sein oder umgekehrt.
Beim 3. und beim 5. Würfelnetz sieht man beim zusammengefalteten Würfel immer ein schwarzes Quadrat, egal auf welche Seite des Würfels man senkrecht schaut. Bei den anderen drei Würfelnetzen ist das nicht der Fall: Wenn man zum Beispiel auf die Seite *A* schaut, ist nicht das gesamte Quadrat schwarz.

<u>Seite 23</u>:



<u>Seite 25</u>:

1-4

	3	**4**			
2	2	1	4	3	
	3	2	1	4	
	4	3	2	1	
	1	4	3	2	

1-4

			3		
3	1	3	2	4	
	2	4	1	3	
	4	2	3	1	**3**
	3	1	4	2	
		3		**3**	

1-4

				2	
2	2	1	4	3	
2	1	4	3	2	
2	3	2	1	4	
	4	3	2	1	
				2	

1-5

			4			
	5	4	1	2	3	
	4	3	2	5	1	
	3	5	4	1	2	**3**
5	1	2	3	4	5	
2	2	1	5	3	4	
	4	**3**				

1-5

			1	**2**	**3**	
	2	1	5	4	3	
	1	5	4	3	2	**4**
	5	4	3	2	1	**5**
	3	2	1	5	4	
	4	3	2	1	5	

1-5

		4				
2	3	1	2	5	4	
	2	3	5	4	1	**3**
	5	4	1	2	3	
4	1	2	4	3	5	
	4	5	3	1	2	**3**
				4		

1-5

					2	
	5	1	2	3	4	
	2	3	4	5	1	**2**
	3	4	5	1	2	**2**
	4	5	1	2	3	**2**
	1	2	3	4	5	
		2	**2**			

1-5

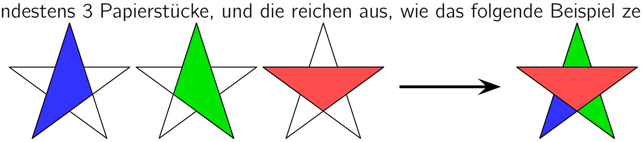
		4				
	5	1	2	4	3	**3**
3	1	2	5	3	4	
	3	4	1	5	2	
	4	5	3	2	1	**4**
4	2	3	4	1	5	
				3		

1-6

		3	**5**				
	5	3	1	6	4	2	**3**
	6	5	2	4	3	1	**5**
	4	1	3	2	6	5	
	3	6	5	1	2	4	**3**
3	2	4	6	5	1	3	
5	1	2	4	3	5	6	
	5			**3**			

<u>Seite 31</u>: Die einzige Lösung ist $A = 7$, $E = 2$, $H = 1$, $M = 8$, $T = 9$.
Die Rechnung lautet dementsprechend $87912 = 4 \cdot 21978$.

<u>Seite 32</u>:  Da jede der 5 Spitzen des Sterns zu einem der dreieckigen Papierstücke gehören muss, untersuchen wir, welche dieser Punkte zum selben Papierstück gehören können.
Benachbarte Spitzen können nicht zum selben Papierstück gehören, da ihre Verbindungskante nicht zum Stern dazugehört. Daraus folgt, dass maximal 2 Spitzen zu einem Papierstück gehören können. Da der Stern 5 Spitzen hat, reichen 2 Papierstücke nicht aus, da mit ihnen höchstens $2 \cdot 2 = 4$ Spitzen entstehen könnten. Wir benötigen mindestens 3 Papierstücke, und die reichen aus, wie das folgende Beispiel zeigt.



 Aus demselben Grund wie beim Stern mit 5 Spitzen, können benachbarte Spitzen nicht zum selben Papierstück gehören. Ebensowenig können Spitzen, die genau eine Spitze zwischen sich haben, nicht zum selben Papierstück gehören. Das bedeutet, dass auch beim Stern mit 7 Spitzen maximal 2 Spitzen zu einem Papierstück gehören können. Daher werden mindestens 4 Papierstücke benötigt, und wie das folgende Beispiel zeigt, reichen 4 Papierstücke auch aus.