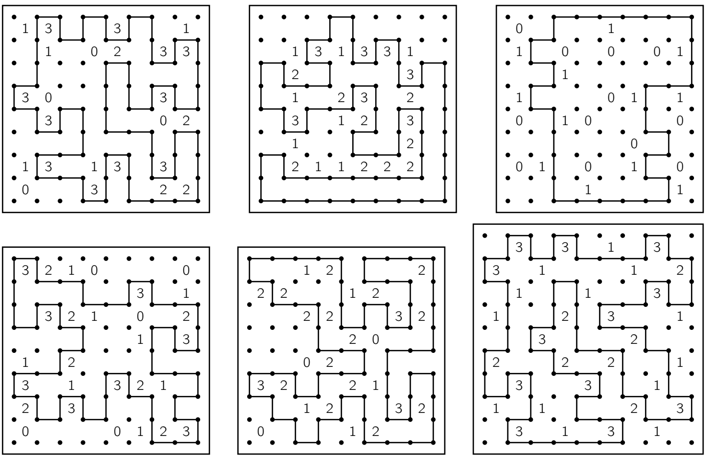
Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2017“ für die Klassenstufen 7 bis 13

<u>Seite 6</u>: Da $AB+CC < 100+100 = 200$ gilt, muss $A = 1$ gelten. Also gilt $10+B+11\cdot C = 100+10\cdot B+C$ bzw. $10 \cdot C = 90 + 10 \cdot B$. Daraus folgt sofort $C = 9$ und $B = 0$.
Die vollständige Gleichung lautet $10 + 99 = 109$.

<u>Seite 9</u>: a) Der erste Summand links ist größer als der erste Summand rechts. Ebenso sind auch der zweite, dritte und vierte Summand links größer als der entsprechende Summand rechts. Und der fünfte Summand ist links und rechts der gleiche. Damit ist sicher die linke Summe größer als die rechte Summe.

b) An den Zehntausender-Stellen stehen links einmal die 5 und rechts fünfmal die 1, also gibt es auf beiden Seiten insgesamt 5 Zehntausender. An den Tausender-Stellen stehen links zweimal die 4 und rechts viermal die 2, also gibt es auf beiden Seiten insgesamt 8 Tausender. An den Hunderter-Stellen stehen links und rechts dreimal die 3, also gibt es auf beiden Seiten insgesamt 9 Hunderter. An den Zehner-Stellen stehen links viermal die 2 und rechts zweimal die 4, also gibt es auf beiden Seiten insgesamt 8 Zehner. An den Einer-Stellen stehen links fünfmal die 1 und rechts einmal die 5, also gibt es auf beiden Seiten insgesamt 5 Einer. Somit sind die linke und die rechte Summe gleich.

<u>Seite 12</u>:



<u>Seite 17</u>: Die vervollständigten Gleichungen lauten:

$$\frac{3}{6} - \frac{792}{1584} = 0$$

$$\frac{7}{14} - \frac{293}{586} = 0$$

$$\frac{3}{6} + \frac{485}{970} = 1^2$$

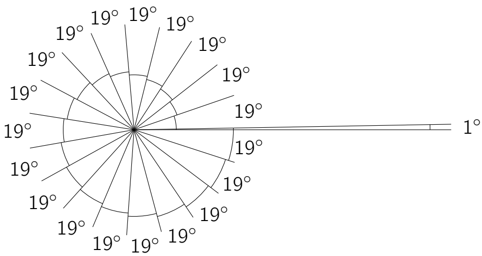
$$\frac{918}{306} \cdot 7 = 25 - 4$$

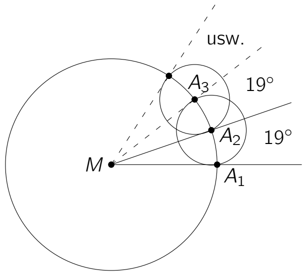
<u>Seite 18</u>: Die Seitenlänge des gesamten Quadrats sei a und die des 36. Quadrats sei b. Die restlichen 35 Quadrate haben Seitenlänge 1. Alle 36 kleinen Quadrate liegen gerade nebeneinander, da es ansonsten Lücken geben würde.
Da an mindestens einer der Seiten des gesamten Quadrats ausschließlich Quadrate mit Seitenlänge 1 liegen, muss a eine natürliche Zahl sein. Verlängern wir eine Seite des 36. Quadrats bis zu den Rändern des gesamten Quadrats, so sehen wir, dass a die Summe aus b und einer oder mehreren 1-en ist. Also ist auch b eine natürliche Zahl.
Der Flächeninhalt des gesamten Quadrats ist gleich der Summe der Flächeninhalte der kleinen Quadrate: $a^2 = 35 \cdot 1 + b^2$ bzw. $a^2 - b^2 = 35$. Mithilfe der 3. binomischen Formel lässt sich diese Gleichung umformen zu $(a - b)(a + b) = 35$. Da sich 35 als Produkt von natürlichen Zahlen nur auf zwei Weisen schreiben lässt, gilt entweder (1) $a - b = 1$ und $a + b = 35$ ODER (2) $a - b = 5$ und $a + b = 7$. Im Fall (1) gilt $a = 18$ und $b = 17$. Im Fall (2) gilt $a = 6$ und $b = 1$, was nach Aufgabenstellung ausgeschlossen wurde. Das 36. Quadrat hat also einen Flächeninhalt von $b^2 = 17^2 = 289$.

Seite 19: Es gibt zwei Möglichkeiten. $A = 5$, $B = 3$, $C = 9$, $D = 0$ führt auf die Gleichung $535+395 = 930$ und $A = 7$, $B = 1$, $C = 9$, $D = 4$ führt auf die Gleichung $717 + 197 = 914$.

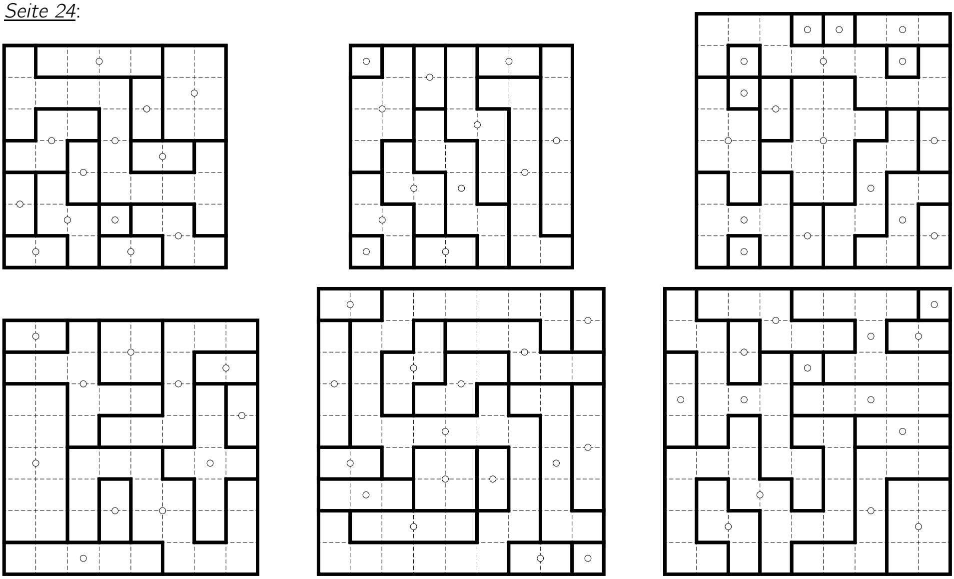
Seite 21: Es gilt $19 \cdot 19^\circ = 361^\circ = 360^\circ + 1^\circ$. Wenn wir also den 19°-Winkel 19-mal im Kreis abtragen, erhalten wir einen 361°-Winkel. Ziehen wir davon den Vollwinkel ab, so erhalten wir einen Winkel von 1°.

Und für das mehrmalige Abtragen des Winkels reicht ein Zirkel aus: Dazu zeichnen wir als erstes einen Kreis um die Spitze des Winkels, der beide Strahlen des Winkels schneidet. Den Mittelpunkt des Kreises bezeichnen wir mit M und die beiden Schnittpunkte bezeichnen wir mit A_1 und A_2. Anschließend zeichnen wir einen Kreis um A_2 mit Radius $\overline{A_1A_2}$. Den neuen Schnittpunkt mit dem großen Kreis bezeichnen wir mit A_3. Dann zeichnen wir einen Kreis um $A3$ mit Radius $\overline{A_2A_3}$, usw. bis wir bei A_{20} angekommen sind. Der Winkel $\measuredangle A_1MA_{20}$ ist der gesuchte 1°-Winkel.





Seite 24:



Seite 25: Die Gesamtmasse der acht Gewichtsstücke beträgt 836 g.

Damit die Seite mit dem schwersten Gewichtsstück *leichter* ist als die andere Seite, muss das Gesamtgewicht der anderen drei Gewichtsstücke auf dieser Seite kleiner sein als $836\,\mathrm{g}\,/2 - 108\,\mathrm{g} = 310\,\mathrm{g}$. Dafür gibt es die folgenden 7 Möglichkeiten: 101 g 102 g 103 g; 101 g 102 g 104 g; 101 g 102 g 105 g; 101 g 102 g 106 g; 101 g 103 g 104 g; 101 g 103 g 105 g; 102 g 103 g 104 g.

Damit die Seite mit dem schwersten Gewichtsstück *genauso schwer* ist wie die andere Seite, muss das Gesamtgewicht der anderen drei Gewichtsstücke auf dieser Seite gleich 310 g sein. Dafür gibt es die folgenden 4 Möglichkeiten: 101 g 102 g 107 g; 101 g 103 g 106 g; 101 g 104 g 105 g; 102 g 103 g 105 g.

Dafür, dass die Seite mit dem schwersten Gewichtsstück *schwerer* ist als die andere Seite, gibt es folglich $\binom{7}{3} - 7 - 4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 11 = 24$ Möglichkeiten.

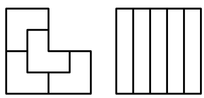
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das schwerste Gewichsstück auf der Seite mit der größeren Masse steht unter der Bedingung, dass sich die Waage nicht im Gleichgewicht befindet, ist $\frac{24}{7+24} = \frac{24}{31} \approx 77{,}4\,\%$.

Die Gesamtmasse der acht Gewichtsstücke beträgt 840 g. Auf jeder Seite beträgt die Masse also 420 g.

Es gibt die folgenden 5 Möglichkeiten für die Seite mit dem 108-g-Gewichtsstück, sodass die Waage im Gleichgewicht ist: 102 g 103 g 107 g 108 g; 102 g 104 g 106 g 108 g; 102 g 105 g(A) 105 g(B) 108 g; 103 g 104 g 105 g(A) 108 g; 103 g 104 g 105 g(B) 108 g.

In den ersten drei Fällen stehen die beiden 105-g-Gewichtsstücke zusammen auf einem Teller, bei den anderen beiden Fällen stehen sie auf verschiedenen Tellern. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden 105-g-Gewichtsstücke zusammen auf einem Teller stehen unter der Bedingung, dass sich die Waage im Gleichgewicht befindet, gleich $\frac{3}{5} = 60\,\%$.

Wenn acht Gummibären weniger als 9 g wiegen, dann wiegen alle 100 Gummibären zusammen weniger als $\frac{100}{8} \cdot 9\,\mathrm{g} = 12{,}5 \cdot 9\,\mathrm{g} = 112{,}5\,\mathrm{g}$. Und wenn neun Gummibären mehr als 10 g wiegen, dann wiegen alle 100 Gummibären zusammen mehr als $\frac{100}{9} \cdot 10\,\mathrm{g} = 111{,}\overline{1}\,\mathrm{g}$. Die einzige natürliche Zahl, die kleiner als 112,5 und größer als $111{,}\overline{1}$ ist die 112. Folglich wiegen alle 100 Gummibären zusammen genau 112 g.



Seite 25: Die beiden Figuren lassen sich wie folgt in 4 bzw. 5 gleiche Teile zerlegen: