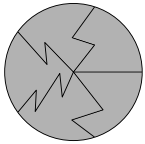
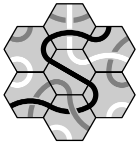
Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2016“ für die Klassenstufen 7 bis 13

Seite 6: Aus $AA + BB + CC = ABC$ folgt $AA + CB = A00$. Da die Summe von zwei zweistelligen Zahlen stets kleiner als 200 ist, ist $A = 1$. Daraus folgt $CB = 100 - 11 = 89$. Es muss also $B = 9$ und $C = 8$ gelten.

Seite 9: Ohne das zweite Teil lässt sich ein Kreis wie folgt legen:



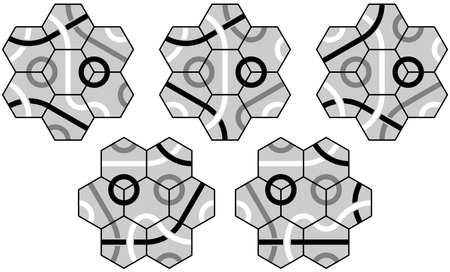
Seite 13: Die einzige Lösung ist:



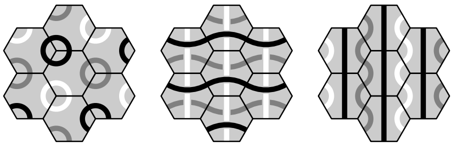
Seite 11: Das Kryptogramm hat die folgenden zwei Lösungen:

$$\begin{array}{r} 6764 \\ +\ 6862 \\ \hline 13626 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6864 \\ +\ 6762 \\ \hline 13626 \end{array}$$

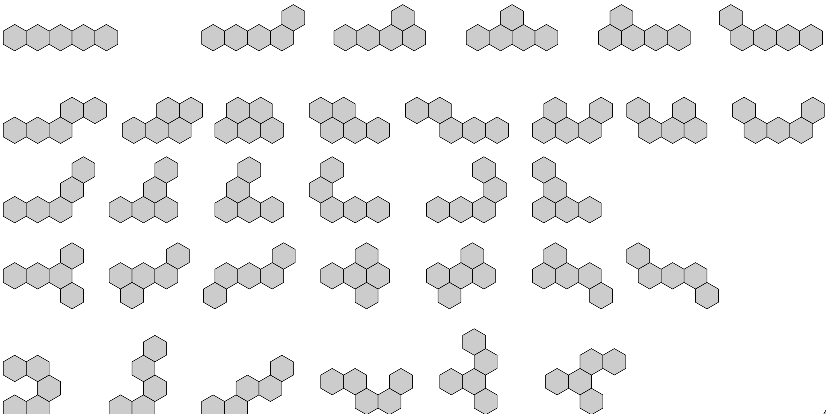
Es gibt 5 solche Tantrix-Blumen. Eine Tantrix-Blume mit einem weißen Kringel gibt es nicht.



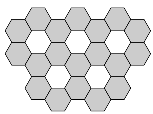
Bei (a), (b) und (c) lassen sich bis auf Drehung jeweils eine Tantrix-Blume legen. Bei (d) gibt es dagegen keine Tantrix-Blume.



Es lassen sich 33 verschiedene Figuren aus 5 Steinen legen. Hier sind alle Figuren aus 5 Steinen systematisch aufgelistet:



Um eine Figur mit 5 Löchern zu legen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Dafür werden auch unterschiedlich viele Steine benötigt. Die kleinste Anzahl an Steinen wird für die Figur rechts benötigt. Es sind also mindestens 19 Steine nötig.

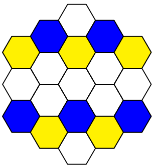


Seite 13 (Fortsetzung): Die 14 Seiten der 7 Doppel-Tantrix-Spielsteine sind alle voneinander verschieden. Außerdem sehen sie anders aus, wenn sie gedreht sind (sie besitzen keine Drehsymmetrien).
Auf das Feld ganz links können wir jeden der 7 Steine legen. Die Seite, die oben liegt, ist ebenfalls beliebig. Und dann können wir ihn noch nach Belieben drehen. Insgesamt gibt es $7 \cdot 2 \cdot 6 = 84$ Möglichkeiten, einen Stein auf das 1. Feld zu legen. Für das 2. Feld können wir jeden der 6 verbliebenen Steine legen. Die Seite, die oben liegt, ist wieder beliebig. Damit er aber farblich an den Stein im 1. Feld passt, gibt es nur 2 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es für jede Wahl des 1. Steins $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten, einen Stein passend in das 2. Feld zu legen. Auf diese Weise finden wir heraus, dass es dann $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ Möglichkeiten für den 3. Stein, $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Möglichkeiten für den 4. Stein, $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten für den 5. Stein, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten für den 6. Stein und $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten für den 7. Stein gibt.
Also lassen sich insgesamt $84 \cdot 24 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4 = 247.726.080$ verschiedene Reihen mit einem Set legen.

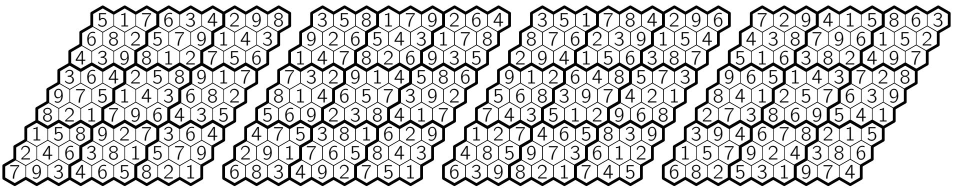
Je nachdem, welche Seite wir als Vorder- oder Rückseite der 7 Tantrix-Spielsteine wählen, gibt es zwischen 308 und 598 verschiedene Tantrix-Blumen, die wir daraus legen können. Insgesamt lassen sich 57.455 verschiedene Tantrix-Blumen mit einem Set legen.

Von den „Anti-Tantrix-Blumen" gibt es erwartungsgemäß viel mehr. Je nachdem, welche der Steine auf der Vorder- oder Rückseite liegen, gibt es zwischen 1.766.716 und 1.888.834 verschiedene „Anti-Tantrix-Blumen". Insgesamt lassen sich 232.758.932 verschiedene „Anti-Tantrix-Blumen" mit einem Set legen.

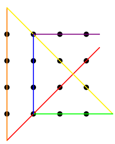
Seite 13: Bis auf Drehung, gibt es genau eine Möglichkeit, die Sechsecke wie gewünscht zu färben.



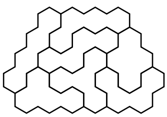
Seite 14: Die Lösungen der Sechseck-Sudokus sind:



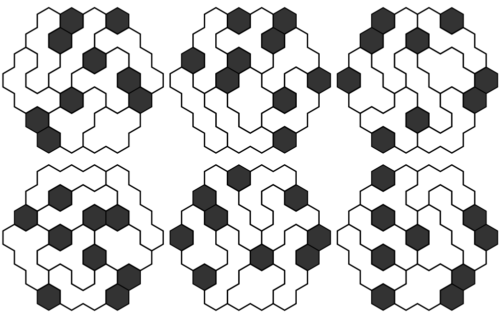
Seite 22: Hier ist eine Möglichkeit für einen solchen Streckenzug:



Seite 24:



Seite 24: Die Lösungen der Wabenfüllungen sind:



Seite 25: Als erstes verteilen wir die 13 kg Mehl gleichmäßig auf beide Waagschalen, sodass auf beiden jeweils 6,5 kg Mehl liegen. Dann verteilen wir 6,5 kg gleichmäßig auf beide Waagschalen, sodass auf beiden jeweils 3,25 kg Mehl liegen. Im dritten Wiegevorgang wiegen wir von einem der beiden 3,25 kg Haufen mit den beiden Gewichten 250 g, also 0,25 kg ab. Dabei bleiben 3 kg von dem Haufen übrig. Der Rest des Mehls wiegt zusammen 10 kg.

Wenn wir nur das 200-g-Gewicht verwenden wollen, müssen wir beim ersten Wiegevorgang dieses Gewicht auf eine der beiden Waagschalen stellen. Wir verteilen dann die 13 kg Mehl auf beide Waagschalen so, dass die Waage im Gleichgewicht ist. Dann sind auf der Seite mit dem Gewicht 6,4 kg Mehl und auf der anderen Seite 200 g mehr, also 6,6 kg Mehl. Anschließend verteilen wir die 6,4 kg Mehl gleichmäßig auf beide Waagschalen, sodass auf beiden jeweils 3,2 kg Mehl liegen. Und zum Schluss wiegen wir von 3,2 kg Mehl noch 200 g ab, sodass 3 kg übrig bleiben.

Wir bezeichnen die 5 Münzen mit A, B, C, D und E. Als erstes wiegen wir A gegen B.

Fall 1: Sind A und B gleich schwer, so sind A und B zwei von den 3 gleich schweren Münzen. Dann wiegen wir als zweites C gegen A. Dann wissen wir, was C für eine Münze ist: Ist C schwerer als A, so ist C die gesuchte schwerere Münze. Ist C leichter als A, so ist C die gesuchte leichtere Münze. Und wenn C und A gleich viel wiegen, so ist C eine der 3 gleich schweren.
Als drittes wiegen wir D gegen A und wissen dann (wie eben bei C), was D für eine Münze ist. Dann ist E die verbleibende 5. Münze, und wir kennen nun folglich die gesuchte leichtere und die gesuchte schwerere Münze.

Fall 2: A ist schwerer als B. Als zweites wiegen wir dann C gegen D.

Sind C und D gleich schwer, wiegen wir C gegen E und wissen (wie bei Fall 1), was E für eine Münze ist. Ist E die gesuchte leichtere Münze, so ist A die gesuchte schwerere. Ist E eine der 3 gleich schweren Münzen, so ist B die gesuchte leichtere und A die gesuchte schwerere Münze. Ist E die gesuchte schwerere Münze, so ist B die gesuchte leichtere.

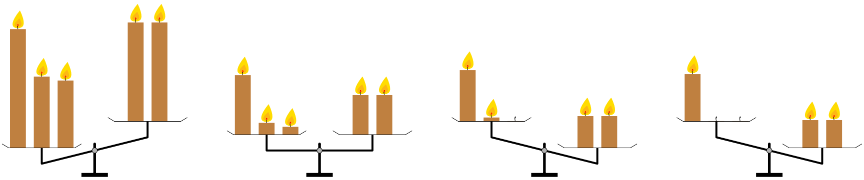
Sind C und D nicht gleich schwer, muss E eine der 3 gleich schweren Münzen sein. Wir wiegen als drittes A gegen C.
Da A schwerer als B ist, kann A nicht die gesuchte leichtere Münze sein, und ist damit sicher nicht leichter als C. Ist A schwerer als C, so ist A die gesuchte schwerere Münze und die leichtere der beiden Münzen C und D ist die gesuchte leichtere. Ist A genauso schwer wie C, so ist B die gesuchte leichtere Münze und die schwerere der beiden Münzen C und D ist die gesuchte schwerere Münze.

Fall 3: A ist leichter als B. Hier gehen wir genauso wie in Fall 2 vor.

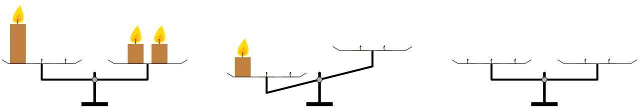
Seite 25 (Fortsetzung):  Bei dieser Aufgabe ist es sinnvoll, von hinten anzufangen, also 30 Minuten nach dem Anzünden, und sich dann zeitlich rückwärts eine mögliche Aufstellung zu überlegen. Im einfachsten Fall ist nach 30 Minuten die letzte Kerze heruntergebrannt.

Eine mögliche Anfangsaufstellung wäre zum Beispiel: Links stehen Kerzen der Größen 30, 18 und 17 und rechts Kerzen der Größen 25 und 25.

Dann ist die Waage zum ersten Mal nach 15 Minuten im Gleichgewicht, $15 + 3 + 2 = 10 + 10$, zum zweiten Mal nach 20 Minuten, $10 + 0 + 0 = 5 + 5$ und zum dritten Mal nach 30 Minuten, $0 + 0 + 0 = 0 + 0$.



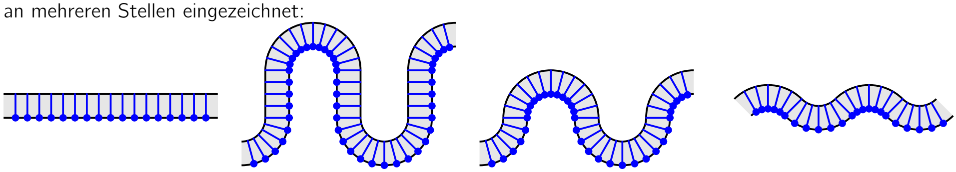
nach 0 min $30{+}18{+}17 > 25{+}25$ | nach 15 min $15{+}3{+}2 = 10{+}10$ | nach 17 min $13{+}1{+}0 < 8{+}8$ | nach 18 min $12{+}0{+}0 < 7{+}7$



nach 20 min $10{+}0{+}0 = 5{+}5$ | nach 25 min $5{+}0{+}0 > 0{+}0$ | nach 30 min $0{+}0{+}0 = 0{+}0$

Seite 25: Jeder der drei langen Masten wird für sich an der Wasseroberfläche gespiegelt. Da die Masten senkrecht zur Wasseroberfläche stehen, ist ihr Spiegelbild das, was bei Bild 1 zu sehen ist.

Von den 6 angegebenen Flüssen haben in der oberen Zeile der 1. und der 2. Fluss und in der unteren Zeile der 1. und der 3. Fluss die gewünschte Eigenschaft. Zum Veranschaulichen, sind die Abstände zum anderen Ufer an mehreren Stellen eingezeichnet:



Bei den anderen beiden Flüssen gibt es verschiedene Stellen am Ufer, von denen das andere Ufer unterschiedliche Abstände hat: In beiden Bildern ist der Abstand vom roten (linken) Punkt zum anderen Ufer größer als der Abstand vom blauen (rechten) Punkt zum anderen Ufer.