Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2015“ für die Klassenstufen 7 bis 13

Seite 6: Es gibt 21 Möglichkeiten:

$33 \cdot 33 + 11 = 1100$
$33 \cdot 33 + 22 = 1111$
$33 \cdot 33 + 33 = 1122$
$33 \cdot 33 + 44 = 1133$
$33 \cdot 33 + 55 = 1144$
$33 \cdot 33 + 66 = 1155$
$33 \cdot 33 + 77 = 1166$
$33 \cdot 33 + 88 = 1177$
$33 \cdot 33 + 99 = 1188$

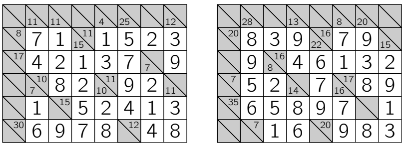
$66 \cdot 66 + 44 = 4400$
$66 \cdot 66 + 55 = 4411$
$66 \cdot 66 + 66 = 4422$
$66 \cdot 66 + 77 = 4433$
$66 \cdot 66 + 88 = 4444$
$66 \cdot 66 + 99 = 4455$

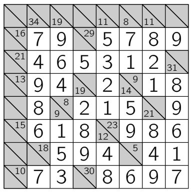
$88 \cdot 88 + 11 = 7755$
$88 \cdot 88 + 22 = 7766$
$88 \cdot 88 + 33 = 7777$
$88 \cdot 88 + 44 = 7788$
$88 \cdot 88 + 55 = 7799$

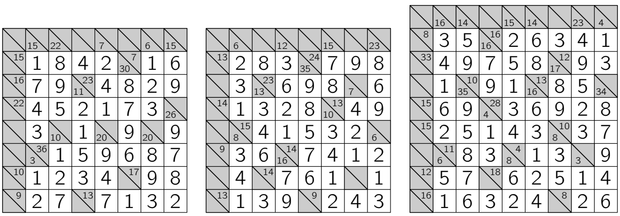
$99 \cdot 99 + 99 = 9900$

Seite 8: Für $p = 2$ finden wir die einzige Lösung: $2 + 1 = 3$, $2 + 5 = 7$ und $2 + 15 = 17$.
Die Zahlen 1, 5 und 15 lassen die Reste 0, 1 und 2 beim Teilen durch 3. Also lassen auch die Zahlen $p + 1$, $p + 5$ und $p + 15$ die Reste 0, 1 und 2 beim Teilen durch 3. Demzufolge ist immer eine der drei Zahlen durch 3 teilbar. Da die einzige durch 3 teilbare Primzahl 3 ist, muss $p + 1 = 3$ oder $p + 5 = 3$ oder $p + 15 = 3$ sein. Nur der Fall $p + 1 = 3$ liefert eine Lösung.

Seite 12:







Seite 12: Wir finden die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen, indem wir die Summen systematisch aufschreiben. Für die 15 gibt es 7 Summen mit 2 Summanden:

$$1 + 14 = 2 + 13 = 3 + 12 = 4 + 11 = 5 + 10 = 6 + 9 = 7 + 8,$$

12 Summen mit 3 Summanden:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 12 = 1 + 3 + 11 = 1 + 4 + 10 = 1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 \\ =\,&2 + 3 + 10 = 2 + 4 + 9 = 2 + 5 + 8 = 2 + 6 + 7 \\ =\,&3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6, \end{aligned}$$

6 Summen mit 4 Summanden:

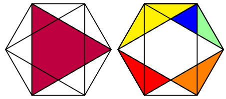
$$1 + 2 + 3 + 9 = 1 + 2 + 4 + 8 = 1 + 2 + 5 + 7 = 1 + 3 + 4 + 7 = 1 + 3 + 5 + 6 = 2 + 3 + 4 + 6,$$

sowie eine Summe mit 5 Summanden:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Also lässt sich die 15 auf 26 verschiedene Arten als Summe verschiedener natürlicher Zahlen schreiben.

Auf die gleiche Weise lassen sich 63 verschiedene Arten finden, 20 als Summe verschiedener natürlicher Zahlen zu schreiben. Es sind 9 Summen mit 2, 24 Summen mit 3, 23 Summen mit 4 und 7 Summen mit 5 Summanden.



Seite 13: Das mittlere große Dreieck kommt 2-mal vor, alle anderen 6-mal. Es sind also 32 Dreiecke zu finden.
Wer sich das eine mittlere Dreieck weiter vorn als das andere mittlere Dreieck vorstellt, kann ein Oktaeder entdecken.

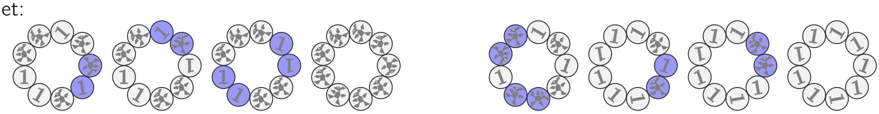
Seite 17: Die gesuchten mathematischen Begriffe sind MENGE, TEILER oder TEILEN, BETRAG, UMFANG, GERADE, SEHNE, PRISMA.

Seite 18: Wir bezeichnen den ersten Summanden mit S. Aus $2015 = S + 5S + 10S + 15S = 31S$ und $2015 : 31 = 65$ ergibt sich die gesuchte Zerlegung $65 + 325 + 650 + 975 = 2015$.

Seite 20: Die gesuchte Zahl sei n. Dann ist zum einen n durch 13 teilbar und zum anderen $n-1$ durch 2, 3, 5 und 7 teilbar. Also gibt es zwei natürliche Zahlen m und k, sodass $n = 13m$ und $n-1 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot k = 210k$. Folglich ist $m = \dfrac{210k+1}{13} = 16k + \dfrac{2k+1}{13}$. Es muss also $2k+1$ durch 13 teilbar sein, und das kleinste k, für das das gilt, ist $k = 6$. Das gesuchte n ist gleich $210 \cdot 6 + 1 = 1261$.

Seite 22: In dem Produkt steckt der Faktor 5 drei Mal, und zwar in der 5, der 10 und der 15. Der Faktor 2 steckt in jeder geraden Zahl mindestens einmal, insgesamt also sicher mehr als 3-mal, sodass das Produkt 3-mal durch $5 \cdot 2 = 10$, also durch 1000 teilbar ist und somit auf 3 Nullen endet. Die rechte Fliege sitzt also auf einer 0. Das Produkt ist ebenfalls durch 9 teilbar, also muss auch die Quersumme dieser Zahl durch 9 teilbar sein. Die Quersumme des Produkts ist gleich $1+2+1+6+4+5+1+0+0+4+0+F+8+3+2+0+0+0 = 37 + F = 4 \cdot 9 + 1 + F$, wobei das F für die Zahl unter der linken Fliege steht. Da F einstellig ist, muss $F = 8$ gelten.

Seite 24: **Kopf oder Zahl?** Im linken Kreis ist die Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen, gerade. Bei jedem Zug ändert sich die Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen, entweder um 2 oder sie bleibt gleich. Somit ist die Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen, stets gerade. Also können die 9 Münzen nie gleichzeitig Zahl zeigen. Mit der gleichen Überlegung weiß man, dass im rechten Kreis die 9 Münzen nie gleichzeitig Kopf zeigen.
Wie im linken (bzw. rechten) Kreis erreicht werden kann, dass alle Münzen Kopf (bzw. Zahl) zeigen, ist hier abgebildet:



<u>*Seite 24*</u>: **Verwegen gewogen** Wir zeigen gleich, wie der Hofnarr vorgegangen sein könnte, und bezeichnen die Münzen mit $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$. Bei der ersten Wägung vergleichen wir A, B, C, D mit E, F, G, H.

1. Fall: A, B, C, D und E, F, G, H sind gleich schwer. Dann ist die gesuchte Münze I, J, K oder L. Dann wiegen wir A, B, C gegen I, J, K.
   (a) Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist L die gesuchte Münze. Dann wiegen wir A gegen L und wissen dann, ob sie leichter oder schwerer als die anderen ist.
   (b) Sind A, B, C schwerer als I, J, K, so ist die gesuchte Münze I, J oder K und sie ist leichter als die anderen. Dann wiegen wir I gegen J. Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist K die gesuchte Münze. Ansonsten ist es die leichtere der beiden Münzen auf der Waage.
   (c) Sind A, B, C, D leichter als I, J, K, L, so können wir analog zu Fall (1b) vorgehen.

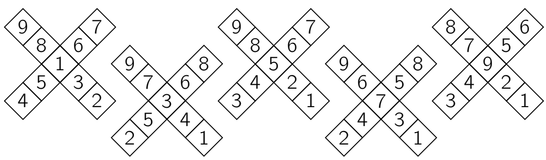
2. Fall: A, B, C, D sind schwerer als E, F, G, H. Die gesuchte Münze ist also entweder A, B, C oder D und schwerer als die anderen Münzen oder sie ist E, F, G oder H und leichter als die anderen Münzen. Nun wiegen wir A, B, E gegen C, D, I, wobei wir von I wissen, dass sie nicht die gesuchte Münze ist.
   (a) Ist die Waage im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Münze F, G oder H und leichter als die anderen. Dann wiegen wir analog zu Fall (1b) F gegen G.
   (b) Sind A, B, E schwerer als C, D, I, so ist die gesuchte Münze A oder B und schwerer als die anderen. Dann wiegen wir A gegen B und die schwerere der beiden ist die gesuchte Münze.
   (c) Sind A, B, E leichter als C, D, I, so ist die gesuchte Münze entweder E und leichter als die anderen oder C oder D und schwerer als die anderen. Wir wiegen C gegen D. Ist die Waage dann im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Münze E. Andernfalls ist es die schwerere der beiden Münzen auf der Waage.

3. Fall: A, B, C, D sind leichter als E, F, G, H. Die Argumentation ist analog zu Fall (2), indem wir die Namen von A, B, C, D mit E, F, G, H tauschen.

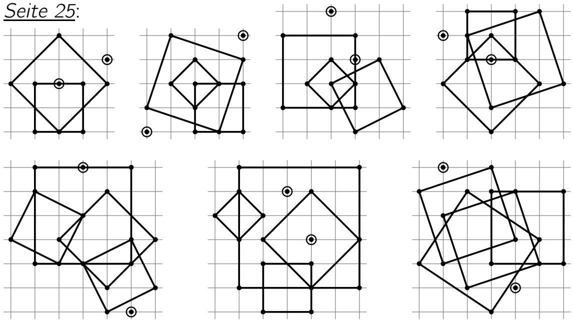
<u>*Seite 24*</u>: **Sportlich, sportlich** Die genauen Ergebnisse des Turniers sind in der Kreuztabelle zu sehen:

	A	B	C	D	E
A		2 : 1	1 : 0	2 : 0	1 : 0
B	1 : 2		3 : 2	0 : 0	2 : 0
C	0 : 1	2 : 3		0 : 0	1 : 0
D	0 : 2	0 : 0	0 : 0		0 : 0
E	0 : 1	0 : 2	0 : 1	0 : 0	

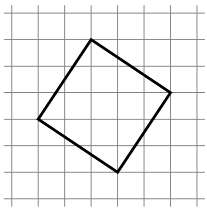
<u>*Seite 24*</u>: Von den Zahlen 1 bis 9 sind vier gerade und fünf ungerade. Also muss in der Mitte eine ungerade Zahl stehen, da ansonsten eine der beiden diagonalen Summen gerade und die andere ungerade wäre. Steht die 1 in der Mitte, so ist die magische Summe 23; bei der 3 ist sie 24; bei der 5 ist sie 25; bei der 7 ist sie 26 und bei der 9 ist sie 27. Hier ist jeweils ein Beispiel für die Eintragungen:



<u>*Seite 25*</u>:



<u>*Seite 25*</u>: Da die Flächeneinheit Kästchen sind, ist die Längeneinheit die Seitenlänge eines Kästchens.
Die „geraden“ Gitterquadrate haben eine ganzzahlige Seitenlänge. Folglich sind deren Flächeninhalte Quadratzahlen: **1**, **4**, **9**, **16**, ...
Bei den „schiefen“ Gitterquadraten kann die Seitenlänge mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Wenn eine Seite des Gitterquadrats a Längeneinheiten nach rechts oder links und b Längeneinheiten nach oben oder unten verläuft, so beträgt ihre Länge $\sqrt{a^2 + b^2}$ Längeneinheiten. Das Gitterquadrat hat dann einen Flächeninhalt von $a^2 + b^2$ Kästchen. Die vollständige Liste der Flächeninhalte von „schiefen“ Gitterquadraten mit einem Flächeninhalt zwischen 1 und 20 lautet: $1^2 + 1^2 = \mathbf{2}$, $1^2 + 2^2 = \mathbf{5}$, $1^2 + 3^2 = \mathbf{10}$, $1^2 + 4^2 = \mathbf{17}$, $2^2 + 2^2 = \mathbf{8}$, $2^2 + 3^2 = \mathbf{13}$, $2^2 + 4^2 = \mathbf{20}$, $3^2 + 3^2 = \mathbf{18}$.
Ein Gitterquadrat mit Flächeninhalt 7 lässt sich nicht zeichnen. Ein Gitterquadrat mit Flächeninhalt 13 ist im Bild zu sehen.



<u>*Seite 26*</u>: Es gibt 7 Möglichkeiten, 2015 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen zu schreiben.

$$\begin{aligned} 2015 &= 1007 + 1008 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405 \\ &= 197 + \ldots + 206 = 149 + \ldots + 161 = 65 + \ldots + 90 \\ &= 50 + \ldots + 80 = 2 + \ldots + 63 \end{aligned}$$