Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2015“ für die Klassenstufen 3 bis 8

Seite 5: 2+6=8 5+5=10 4+3=7

6+2=8 2+4=6 6-2=4 9-3=6

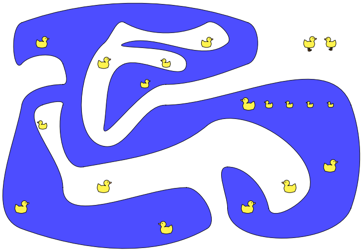
9+9=18 7-1=6 8+0=8

Seite 7: Wir geben zwei Lösungen an.

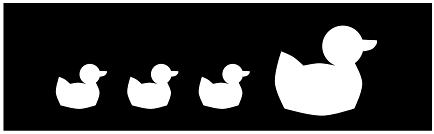
4	2	6	9	8	1	4	8
2	5	4	5	1	2	7	2
9	8	3	3	4	7	8	8
4	2	6	9	6	7	2	7
5	7	5	4	5	6	5	3
6	1	8	3	1	8	3	7

4	2	6	9	8	1	4	8
2	5	4	5	1	2	7	2
9	8	3	3	4	7	8	8
4	2	6	9	6	7	2	7
5	7	5	4	5	6	5	3
6	1	8	3	1	8	3	7

Seite 10: Auf dem Krummen See schwimmen 11 Enten.



Seite 10: Zu sehen sind eine große Ente mit drei Entenküken.



Seite 11: Auf beiden Truhen steht, dass ein Klumpen Gold in der einen oder in der anderen Truhe liegt. Da eine der beiden Aussagen laut der Elfe wahr ist, liegt auf jeden Fall in einer der Truhen ein Klumpen Gold. Wäre die Aussage auf der oberen Truhe „In dieser Truhe ist ein Klumpen Gold. In der anderen Truhe ist ein Stein.“ wahr, so wäre die Aussage auf der unteren Truhe „In einer der beiden Truhen ist ein Klumpen Gold und in der anderen ein Stein.“ ebenfalls wahr. Da aber auf einer der Truhen laut der Elfe eine Lüge steht, steht folglich auf der oberen Truhe eine Lüge und auf der unteren die Wahrheit.
Würde sich in der unteren Truhe kein Klumpen Gold befinden, dann müsste in dieser ein Stein und in der oberen das Gold sein. Dann wäre aber die Aussage auf der oberen Truhe wahr. Also liegt auf jeden Fall in der unteren Truhe ein Klumpen Gold, und diese Truhe hat Knarz geöffnet.

Da die Müllers dem Schild nach Mitteldorf folgten und in Niederdorf ankamen, müssen die Schilder „Mitteldorf“ und „Niederdorf“ vertauscht worden sein. Das bedeutet insbesondere, dass das Schild nach Oberdorf in die richtige Richtung zeigte. Da die Müllers wussten, dass sie aus Oberdorf kamen, wussten sie auch, dass das Schild nach Oberdorf nicht vertauscht wurde, also mussten die beiden anderen vertauscht worden sein.

Honig Mit der Beobachtung 3 weiß der Bärensohn, dass die Pilze im Gefäß mit der Aufschrift „Honig“ sind. Dann sind nach Beobachtung 2 die Nüsse im Gefäß, das mit „Pilze“ beschriftet ist. Dann können sich die Beeren nur im „Honig“-Gefäß befinden. Und um Honig zu naschen, muss der Bärensohn in das „Beeren“-Gefäß greifen.

Seite 11: Es sind 9 Möglichkeiten. Wir schreiben sie systematisch auf. Dabei steht N für Nüsse, H für Honig, B für Beeren und P für Pilze.

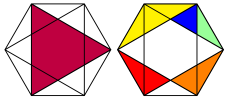
Nüsse	H	H	H	B	B	B	P	P	P
Honig	N	B	P	N	P	P	N	B	B
Beeren	P	P	N	P	N	H	H	N	H
Pilze	B	N	B	H	H	N	B	H	N

Seite 12: Wir geben jeweils mindestens ein Beispiel an.

1 $12+3+4+5=12-3+4+5+6=24$
2 $1+2+3=6=1\cdot2\cdot3$
3 $1234-567+8-9=1+2\cdot345-6\cdot7+8+9=666$
4 $1+2+3-4+5+6=13$
5 $1234-567=667$
6 $12=3\cdot4$ oder $12:3=4$ oder $1=2+3-4$
7 $56=7\cdot8$ oder $5=6+7-8$ oder $56:7=8$
8 $3\cdot4\cdot5:6+7=8+9$ oder $3+4-5+6-7+8=9$
9 $17\cdot71=1207$

Seite 12: In das Kästchen muss ein + eingetragen werden:
$20 \cdot 15 - 2 + 105 = 403 = 2015 : 5$

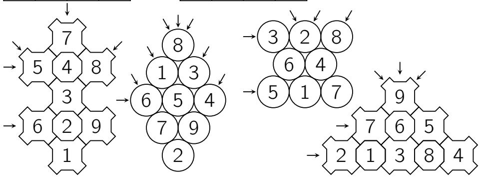
Seite 13: Das mittlere große Dreieck kommt 2-mal vor, alle anderen 6-mal. Es sind also 32 Dreiecke zu finden.
Wer sich das eine mittlere Dreieck weiter vorn als das andere mittlere Dreieck vorstellt, kann ein Oktaeder entdecken.



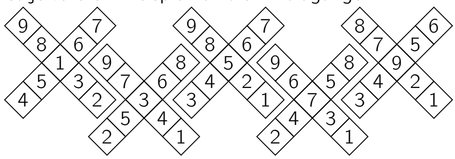
Seite 14: Viele der Aufgaben haben mehrere Lösungen, wir geben jeweils eine an:

2	16	3	13
7	9	6	12
14	4	15	1
11	5	10	8

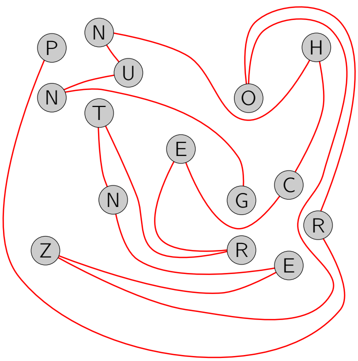
14	15	4	1
2	3	16	13
7	6	9	12
11	10	5	8



Seite 14: Von den Zahlen 1 bis 9 sind vier gerade und fünf ungerade. Also muss in der Mitte eine ungerade Zahl stehen, da ansonsten eine der beiden diagonalen Summen gerade und die andere ungerade wäre. Steht die 1 in der Mitte, so ist die magische Summe 23; bei der 3 ist sie 24; bei der 5 ist sie 25; bei der 7 ist sie 26 und bei der 9 ist sie 27. Hier ist jeweils ein Beispiel für die Eintragungen:



Seite 16: Ein möglicher Weg verläuft wie folgt:



Seite 18: Die gesuchten mathematischen Begriffe sind QUADER, TEILER oder TEILEN, UMFANG, GERADE, PRISMA, ZIFFER.

Seite 19: Wir nennen den ersten Summanden S. Aus $2015 = S+3S+4S+5S = 13S$ und $2015 : 13 = 155$ ergibt sich die gesuchte Zerlegung:
$155 + 465 + 620 + 775 = 2015$.

Seite 20: Um den großen Würfel zu bauen, fehlen in der 4. Schicht 11 kleine Würfel und in der obersten Schicht 15 kleine Würfel. Das sind insgesamt 26. Verbaut sind $5 \cdot 5 \cdot 5 - 26 = 125 - 26 = 99$ kleine Würfel, aus denen sich ein $4 \times 4 \times 4$-Würfel aus $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ kleinen Würfeln, ein $3 \times 3 \times 3$-Würfel aus $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleinen Würfeln und ein $2 \times 2 \times 2$-Würfel aus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ kleinen Würfeln zusammenbauen lassen. Da $64 + 27 + 8 = 99$, sind dann auch alle kleinen Würfel verbaut.

Seite 22: Die Lösungen der Mastermind-Aufgaben sind:

3 5 4	8 5 0	1 3 9 7
6 8 5 3	6 1 7 2	5 2 7 6 8

4 0 7 3 5	●●●●
1 2 0 **3** 6	●●
7 9 2 **3** 8	●○○
4 2 7 **3** **5**	●●●●●

7 4 9 0 3	●●
2 5 **7** 9 4	
8 4 5 1 **3**	●○○
6 **1** 3 2 0	●●○○
6 1 **8** 0 **3**	●●●●●

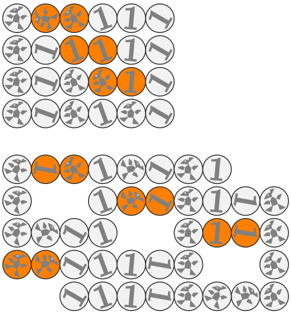
Seite 22: Die gegebene Folge besteht aus 3 verschiedenen einstelligen Zahlen. Dann gibt es also 7 einstellige Zahlen, die nicht in dieser Folge vorkommen. a) Zahlenfolgen ohne schwarzen und weißen Punkt bestehen aus 3 beliebigen der 7 Zahlen, die nicht in der gegebenen Folge vorkommen. Es gibt $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ solche Zahlenfolgen. b) Der schwarze Punkt kann entweder für die 1., die 2. oder die 3. Zahl in der gegebenen Folge stehen. Die anderen beiden Zahlen können 2 beliebige von den 7 Zahlen sein, die nicht in der gegebenen Folge vorkommen. Es gibt $3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$ Zahlenfolgen mit einem schwarzen Punkt. c) Der weiße Punkt kann entweder für die 1., die 2. oder die 3. Zahl in der gegebenen Folge stehen, die an 2 möglichen Stellen stehen kann. Die anderen beiden Zahlen können 2 beliebige von den 7 Zahlen sein, die nicht in der gegebenen Folge vorkommen. Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$ Zahlenfolgen mit einem weißen Punkt. d) Der schwarze Punkt kann entweder für die 1., die 2. oder die 3. Zahl in der gegebenen Folge stehen. Dann steht der weiße Punkt für eine der anderen beiden Zahlen und die dritte Zahl ist eine der 7 Zahlen, die nicht in der gegebenen Folge vorkommen. Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ Zahlenfolgen mit einem schwarzen und einem weißen Punkt.

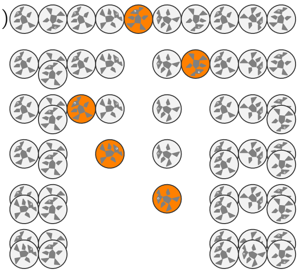
Seite 23: **Sportlich, sportlich** Die genauen Ergebnisse der zwei Turniere sind in den beiden Kreuztabellen zu sehen:

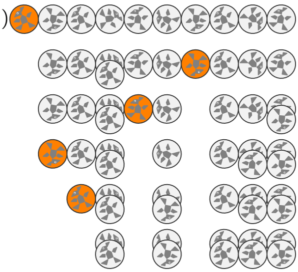
	A	B	C	D
A		1 : 0	2 : 1	2 : 0
B	0 : 1		1 : 1	1 : 0
C	1 : 2	1 : 1		3 : 3
D	0 : 2	0 : 1	3 : 3	

	A	B	C	D	E
A		2 : 1	1 : 0	2 : 0	1 : 0
B	1 : 2		3 : 2	0 : 0	2 : 0
C	0 : 1	2 : 3		0 : 0	1 : 0
D	0 : 2	0 : 0	0 : 0		0 : 0
E	0 : 1	0 : 2	0 : 1	0 : 0	

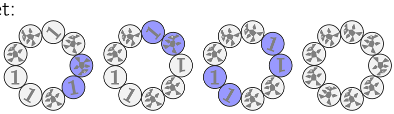
Seite 23: **Kopf oder Zahl?** Es gibt mehrere Lösungswege, von denen jeweils einer angegeben ist.

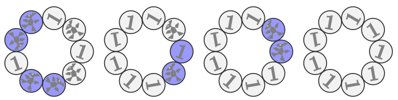


a)


b)


Seite 23: Im linken Kreis ist die Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen, gerade. Bei jedem Zug ändert sich die Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen, entweder um 2 oder sie bleibt gleich. Somit ist die Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen, stets gerade. Also können die 9 Münzen nie gleichzeitig Zahl zeigen. Mit der gleichen Überlegung weiß man, dass im rechten Kreis die 9 Münzen nie gleichzeitig Kopf zeigen.
Wie im linken (bzw. rechten) Kreis erreicht werden kann, dass alle Münzen Kopf (bzw. Zahl) zeigen, ist hier abgebildet:





Seite 24: Im Keller der alten Apotheke tummeln sich mindestens 3 weiße, mindestens 3 graue und mindestens 2 gescheckte Mäuse. Es sind mindestens 8 Mäuse im Keller.
Aus der ersten Anordnung folgt direkt, dass die weißen Mäuse leichter als die gescheckten sind. Aus der zweite Anordnung folgt, dass die grauen Mäuse entweder leichter als die weißen oder leichter als die gescheckten Mäuse sind. Da die gescheckten Mäuse schwerer als die weißen sind, sind die grauen Mäuse mit Sicherheit leichter als die gescheckten. Aus der dritten Anordnung folgt mit der gleichen Überlegung, dass die grauen Mäuse schwerer als die weißen sind. Die weißen Mäuse sind die leichtesten und die gescheckten sind am schwersten.

Da $20 = 100 - 40 - 40$, erhalten wir 20 g mit einem Mal abwiegen, indem wir den Reis und die zwei 40 g-Gewichte auf die eine Waagschale und das 100 g-Gewicht auf die andere Waagschale stellen. Wegen $50 = 70 + 40 + 40 - 100$ und $180 = 100 + 40 + 40$ können wir auch 50 g und 180 g mit einem Mal Wiegen erhalten. Mit den gegebenen Gewichten lassen sich maximal $100 + 70 + 40 + 40 = 250$ Gramm mit einem Wiegevorgang abwiegen. Also müssen wir die 310 Gramm in zwei Schritten abwiegen: Da $310 = 250 + 60 = (100 + 70 + 40 + 40) + (100 - 40)$, können wir im ersten Schritt 250 g und im zweiten Schritt die fehlenden 60 g abwiegen.
Um 5 g zu erhalten, wiegen wir als erstes 10 g ab ($10 = 40 + 40 - 70$). Dann verteilen wir die 10 g gleichmäßig auf beide Waagschalen, sodass auf beiden jeweils 5 g Reis liegen. Um 57,5 g abzuwiegen wiegen wir erst einmal 50 g ab und dann 30 g. Die 30 g verteilen wir gleichmäßig auf beide Waagschalen, sodass auf beiden jeweils 15 g liegen. Dann verteilen wir die 15 g gleichmäßig auf beide Waagschalen, sodass auf beiden jeweils 7,5 g sind.

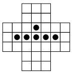
Wir zeigen gleich, wie der Hofnarr vorgegangen sein könnte, und bezeichnen die Münzen mit $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. Bei der ersten Wägung vergleichen wir A, B, C mit D, E, F und bei der zweiten Wägung A, B, C mit G, H, I. Die Waage kann nicht in beiden Fällen im Gleichgewicht gewesen sein. War die Waage in beiden Fällen nicht im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Münze A, B oder C, und die Ausrichtung der Waage verrät uns, ob sie leichter oder schwerer als die anderen ist. War die Waage bei der ersten Wägung im Gleichgewicht, so ist die gesuchte Münze G, H oder I. Und wenn die Waage bei der zweiten Wägung im Gleichgewicht war, so ist die gesuchte Münze D, E oder F. Außerdem wissen wir in jedem Fall, ob sie leichter oder schwerer als die anderen ist.
Wir wissen jetzt schon, ob die gesuchte Münze schwerer oder leichter ist als die anderen acht und können unsere Suche auf 3 Münzen einschränken. Nun nehmen 2 dieser 3 Münzen, unter denen die gesuchte ist, und wiegen sie gegeneinander. Im Falle der Gleichheit ist die nichtgewogene Münze die gesuchte. Bei Ungleichheit ist die leichtere der beiden Münzen die gesuchte, falls die gesuchte Münze leichter ist als die anderen, bzw. die schwerere der beiden, falls die gesuchte Münze schwerer ist als die anderen.

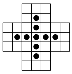
Seite 24: Da ein kleines Gewicht zusammen mit 4 großen Gewichten 100 g wiegen und 4 kleine zusammen leichter sind als ein großes Gewicht, sind 17 kleine Gewichte leichter als 100 g. Ein kleines Gewicht wiegt also weniger als $100\,\text{g} : 17 \equiv 5{,}88\,\text{g}$. Da ein kleines Gewicht eine ganzzahlige Grammzahl hat, wiegt es also entweder 1 g, 2 g, 3 g, 4 g oder 5 g.

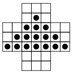
Nun können wir für jeden dieser Fälle das Gewicht des großen Gewichts berechnen: $(100\,\text{g} - 1\,\text{g}) : 4 = 24{,}75\,\text{g}$, $(100\,\text{g} - 2\,\text{g}) : 4 = 24{,}5\,\text{g}$, $(100\,\text{g} - 3\,\text{g}) : 4 = 24{,}25\,\text{g}$, $(100\,\text{g} - 4\,\text{g}) : 4 = 24\,\text{g}$ bzw. $(100\,\text{g} - 5\,\text{g}) : 4 = 23{,}75\,\text{g}$. Da auch das große Gewicht eine ganzzahlige Grammzahl hat, muss das kleine Gewicht 4 g und das große Gewicht 24 g wiegen.

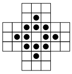
<u>*Seite 25*</u>: Wir nummerieren das Brett wie folgt und geben für jede Aufgabe eine mögliche Sprungreihenfolge an, wobei jeweils die Nummer des Feldes, von dem der springende Stein losspringt, und die Richtung (r – nach rechts, l – nach links, o – nach oben, u – nach unten), in die er springt, angegeben sind.

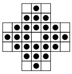
		1	2	3		
		4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
		28	29	30		
		31	32	33		

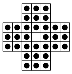

10u, 15r, 24o, 19l, 10u


10o, 24o, 19l, 17o, 2u, 15r, 10u, 29o


18o, 6l, 26o, 9r, 12l, 24r, 27l, 23o, 4u, 10u, 25l, 16u, 21r, 28o, 15r


15r, 18l, 16o, 4r, 6u, 19l, 24l, 10u, 25l, 22r, 29o


11o, 9l, 23u, 25r, 7u, 3l, 27o, 31r, 33o, 13l, 1u, 21r
Dann geht es wie in der vorigen Aufgabe weiter.


5u, 8r, 1u, 3l, 16o, 1u, 28o, 21r, 7u, 24l, 21r, 26l, 33o, 31r, 18u, 33o, 6u, 13l, 27o, 10r, 13l, 24r, 26o, 12l, 10l, 8u, 22r, 17l, 29o, 18l, 15r

<u>*Seite 25*</u>: Da nach jedem Zug ein Stein aus dem Spiel kommt und am Ende genau einer übrig bleibt, ist insgesamt genau ein Sprung weniger zu machen als die Anzahl der Steine in der Startaufstellung. Beim Standardspiel sind das 31 Sprünge.

<u>*Seite 29*</u>: Für $p = 2$ finden wir die einzige Lösung: $2 + 1 = 3$, $2 + 5 = 7$ und $2 + 15 = 17$.
Die Zahlen 1, 5, und 15 lassen die Reste 0, 1 und 2 beim Teilen durch 3. Also lassen auch die Zahlen $p + 1$, $p + 5$ und $p + 15$ die Reste 0, 1 und 2 beim Teilen durch 3. Demzufolge ist immer eine der drei Zahlen durch 3 teilbar. Da die einzige durch 3 teilbare Primzahl 3 ist, muss $p + 1 = 3$ oder $p + 5 = 3$ oder $p + 15 = 3$ sein. Nur der Fall $p + 1 = 3$ liefert eine Lösung.

<u>*Seite 31*</u>: Die gesuchte Zahl sei n. Dann ist zum einen n durch 13 teilbar und zum anderen $n-1$ durch 2, 3, 5 und 7 teilbar. Also gibt es zwei natürliche Zahlen m und k, sodass $n = 13m$ und $n-1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k = 210k$. Folglich ist $m = \dfrac{210k + 1}{13} = 16k + \dfrac{2k + 1}{13}$. Es muss also $2k + 1$ durch 13 teilbar sein, und das kleinste k, für das das gilt, ist $k = 6$. Das gesuchte n ist gleich $210 \cdot 6 + 1 = 1261$.