Lösungen der Knobeleien in „Mathe mit dem Känguru 2014“ für die Klassenstufen 7 bis 13

<u>Seite 5</u>: Wir geben jeweils zwei Lösungen an.

$$\begin{array}{r} 2548 \\ +\,3161 \\ \hline 5709 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2349 \\ +\,7060 \\ \hline 9409 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4236 \\ +\,5080 \\ \hline 9316 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1908 \\ +\,7454 \\ \hline 9362 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3897 \\ +\,4010 \\ \hline 7907 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2451 \\ +\,7080 \\ \hline 9531 \end{array}$$

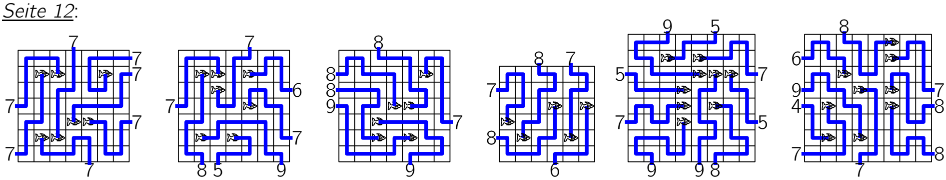
<u>Seite 8</u>: Wir stellen in 3 Ecken jeweils einen Sessel, sodass jeder dieser Sessel für 2 Wände zählt. An die zwei Wände, an denen bereits 2 Sessel stehen, stellen wir 3 weitere und an die anderen beiden Wände 4 Sessel. So stehen an jeder Wand genau 5 Sessel.

<u>Seite 6</u>: Wir nennen den ersten Summanden S. Aus $2014 = S + 7S + 13S + 17S = 38S$ und $2014 : 38 = 53$ ergibt sich die gesuchte Zerlegung $2014 = 53 + 371 + 689 + 901$.

<u>Seite 7</u>: $1000 = 888 + 88 + 8 + 8 + 8$

<u>Seite 9</u>: Der Minuten-Zeiger ist von der 12 aus gesehen bei $\frac{14}{60} \cdot 360° = 84°$. Der Stunden-Zeiger ist von der 12 aus gesehen bei $\frac{8}{12} \cdot 360° + \frac{1}{12} \cdot \frac{14}{60} \cdot 360° = 247°$. Der von den beiden Zeigern aufgespannte Winkel ist also gleich $247° - 84° = 163°$.

<u>Seite 12</u>:



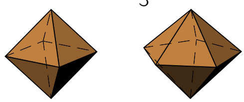
<u>Seite 12</u>: Da die 9 Fische von den Anglerinnen zu gleichen Teilen geangelt wurden, muss die Zahl der Fische durch die der Anglerinnen teilbar sein. Das klappt nur, wenn eine der Anglerinnen sowohl Tochter als auch Mutter ist, wir nennen sie Sandra. Beim Angeln waren also Sandra, Sandras Mutter und Sandras Tochter. Jede von ihnen hat $9 : 3 = 3$ Fische gefangen.

<u>Seite 13</u>: **1/1** Sei w die Anzahl der weißen Kaninchen des Großvaters. Zusammen mit den beiden schwarzen hat er dann $w + 2$ Kaninchen und der Anteil der weißen beträgt $\frac{w}{w+2} > \frac{91}{100}$. Das gilt genau dann, wenn $100w > 91w + 182$ bzw. $9w > 182$ bzw. $w > 182/9 = 20 + 2/9$. Der Großvater hat also mindestens 21 weiße Kaninchen.

2/2 Wir zählen die Anzahl der Teilnehmer, die nicht die Höchstpunktzahl erreicht haben: im 1. Test 20, im 2. Test 28 und im 3. Test 40. Im schlechtesten Fall sind das alles unterschiedliche Teilnehmer, also $20 + 28 + 40 = 88$ Teilnehmer, die nicht in jedem Test die Höchstpunktzahl erreicht haben. Somit haben mindestens $100 - 88 = 12$ Teilnehmer in allen drei Tests die Höchstpunktzahl erreicht.

3/3 Dass 15 % von x eine natürliche Zahl ist, bedeutet, dass $\frac{15}{100} \cdot x = \frac{3}{20} \cdot x$ eine natürliche Zahl ist. Aus der anderen natürlichen Zahl $\frac{33}{100} \cdot x$ klammern wir $\frac{3}{20} \cdot x$ aus: $\frac{33}{100} \cdot x = \frac{11}{5} \cdot \left(\frac{3}{20} \cdot x\right)$. So sehen wir, dass $\frac{3}{20} \cdot x$ durch 5 teilbar sein muss. Die kleinstmögliche Zahl dafür ist 5. Also gilt $\frac{3}{20} \cdot x = 5$ bzw. $x = \frac{100}{3}$.

<u>Seite 13</u>: Von den gegebenen Netzen lassen sich nur aus dem ersten (S) und dem fünften (E) ein geschlossener Körper bauen.



Seite 13:

Anzahl der	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Seitenflächen	4	6	8	12	20
Kanten	6	12	12	30	30
Ecken	4	8	6	20	12

Die Körper sind nach dem griechischen Wort für die Anzahl ihrer Seitenflächen benannt (Vierflächner, Sechsflächner, ...). Wir können feststellen, dass bei allen 5 Körpern die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen gleich 2 ist. Dies ist übrigens für jedes konvexe Polyeder der Fall, wie einer der bekanntesten Sätze der Elementargeometrie besagt: der EULERsche Polyedersatz.

Seite 14: Wir teilen das Knetstück in ein 1 g, ein 3 g und ein 6 g Teil.

Wir bezeichnen die Pferde aufsteigend: das 1. ist das leichteste und das 7. ist das schwerste. Zum Berechnen des Gesamtgewichts reicht es aus, das Gewicht des leichtesten Pferdes zu kennen. Das leichteste Pferd wiegt zwischen 1 g und 7 g. Wir vergleichen das 1. und das 2. Pferd mit dem 6. Pferd. Ist das 6. Pferd leichter als die beiden leichtesten Pferde zusammen, so wiegt das leichteste Pferd zwischen 5 g und 7 g. Ist das 6. Pferd genauso schwer wie die beiden anderen Pferde, so wiegt das leichteste Pferd genau 4 g. Ist das 6. Pferd schwerer als die anderen beiden Pferde, so wiegt das leichteste Pferd zwischen 1 g und 3 g. Im Fall 1 vergleichen wir das 1., 2. und 3. Pferd mit dem 5. und dem 6. Pferd. Im 3. Fall vergleichen wir das 1. und das 2. Pferd mit dem 4. Pferd.

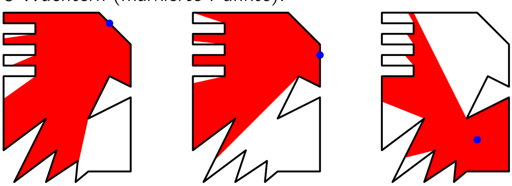
Wir nennen die Mädchen A, B, C, D und E. Es wippen zuerst A und B und anschliessend C und D. Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden (die anderen ergeben sich durch Vertauchen der Namen; $<$ steht „für leichter als“ und $=$ für „genauso schwer wie“):
Fall $A = B$, $C = D$: Jetzt wippen A und E. Sind sie gleich schwer, so bilden A, B, E die Dreiergruppe. Sind sie unterschiedlich schwer, so bilden C, D, E die Dreiergruppe.
Fall $A = B$, $C < D$: Jetzt wippen C und E. Sind sie gleich schwer, so bilden A, B, D die Dreiergruppe. Sind sie unterschiedlich schwer, so bilden A, B, C die Dreiergruppe.
Fall $A < B$, $C < D$: Jetzt wippen B und E. Sind sie gleich schwer, so bilden B, D, E die Dreiergruppe. Sind sie unterschiedlich schwer, so bilden A, C, E die Dreiergruppe.

Seite 14: Die Namen sind EDISON (123679), THALES (012358) und DEMOKRIT (01246789).

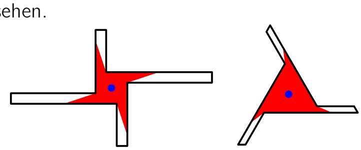
$$\begin{array}{ccccc} 23 & + & 9 & = & 32 \\ - & & - & & - \\ 6 & + & 7 & = & 13 \\ \hline 17 & + & 2 & = & 19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125 \cdot 108 \\ \hline 125 \\ 1000 \\ \hline 13500 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 242 & - & 62 & = & 180 \\ : & & + & & - \\ 11 & \cdot & 8 & = & 88 \\ \hline 22 & + & 70 & = & 92 \end{array}$$

Seite 14: Wir geben jeweils ein Beispiel. $111 + 030 + 000 + 070 + 900 = 1111$, $011 + 303 + 000 + 707 + 090 = 1111$, $110 + 030 + 055 + 007 + 909 = 1111$, $100 + 330 + 505 + 077 + 099 = 1111$, $111 + 333 + 500 + 077 + 090 = 1111$

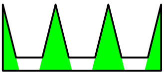
Seite 15: Mit 5 Wächtern lässt sich relativ schnell eine Lösung finden. Mit 4 Wächtern wird es schon schwieriger. Wer ganz genau arbeitet, findet sogar eine Lösung mit nur 3 Wächtern (markierte Punkte).



So könnte das Museum aussehen. Keine der Wände wird vollständig vom Wächter gesehen.

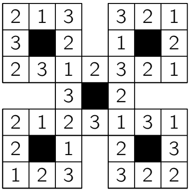


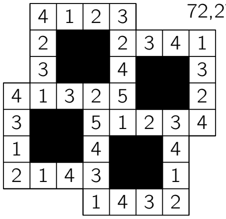
Seite 15: Nach dem Satz von Chvátal werden höchstens 4 Wächter benötigt. Den Grundriss eines Raums, in dem wirklich 4 Wächter benötigt werden, zeigt das Beispiel. In jedem markierten Bereich muss ein Wächter stehen, damit alle 4 Spitzen beobachtet werden können.

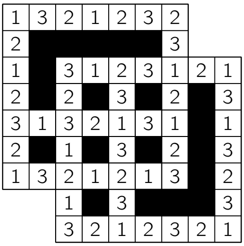


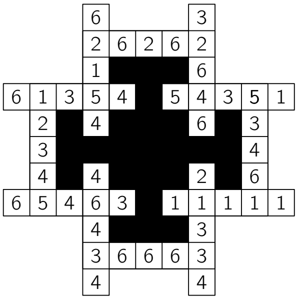
Seite 25:

4	2	3	1	5
1		2		3
5	1	4	3	2
2		5		1
3	5	1	2	4









Seite 26: Korrektur: Eine Fermatsche Primzahl hat die Form $2^{2^n}+1$.

7	8	1	2	5		6	5	5	3	7
3,	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5
3		1	1		9		9	5		2

Seite 20: Das Rechteck besteht aus $17 \cdot 7 = 119$ Kästchen, und die Jahreszahl 2014 (graue Fläche) aus 34 Kästchen. Das sind wegen $34 : 119 = 2 : 7 \approx 0,2857$ also rund 28,57 Prozent.

Seite 22: $35 \cdot 9 = 315$, $45 \cdot 7 = 315$, $55 \cdot 7 = 385$, $65 \cdot 5 = 325$, $75 \cdot 5 = 375$

$12{,}21 : 1{,}11 = 22{,}22 : 2{,}02 = 32{,}23 : 2{,}93 = 42{,}24 : 3{,}84 = 52{,}25 : 4{,}75 = 62{,}26 : 5{,}66 = 72{,}27 : 6{,}57 = 82{,}28 : 7{,}48 = 92{,}29 : 8{,}39 = 11$

Seite 25: 100 ist nicht möglich, da alle möglichen Summen durch 9 teilbar sind. $9+8+7+65+4+3+2+1 = 99$
$9+8+7+6+5+43+21 = 99$

Seite 26: Von den angegebenen Zahlen ist $\frac{355}{113}$ die beste Approximation. Hier sind sie in aufsteigender Reihenfolge:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{31} && \approx 3{,}14138065239\\
&\pi && \approx 3{,}14159265359\\
&\frac{355}{113} && \approx 3{,}14159292035\\
&\sqrt{7+\sqrt{6+\sqrt{5}}} && \approx 3{,}14163254450\\
&\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} && \approx 3{,}14164078650\\
&\frac{22}{7} && \approx 3{,}14285714286\\
&\sqrt{2}+\sqrt{3} && \approx 3{,}14626436994
\end{aligned}$$

Seite 27: Gegeben seien 2014 natürliche Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$. Nun bilden wir folgende Summen: x_1, x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$, ..., $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2013}$, $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2013}+x_{2014}$. Jetzt gibt es zwei Fälle zu betrachten. Fall 1: Unter diesen Summen gibt es eine Zahl, die durch 2014 teilbar ist. Dann sind wir fertig. Fall 2: Wenn keine dieser 2014 Zahlen durch 2014 teilbar ist, kommen nur die 2013 verschiedenen Zahlen $1, 2, \ldots, 2013$ als Rest in Frage. Also müssen zwei dieser Summen den gleichen Rest beim Teilen durch 2014 lassen. Wenn $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$ und $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m$ $(n < m)$ den gleichen Rest beim Teilen durch 2014 lassen, dann ist ihre Differenz $x_{n+1}+\ldots+x_m$ durch 2014 teilbar.
Es lässt sich also immer eine Summe bilden (möglicherweise nur aus einem Summanden bestehend), die durch 2014 teilbar ist.