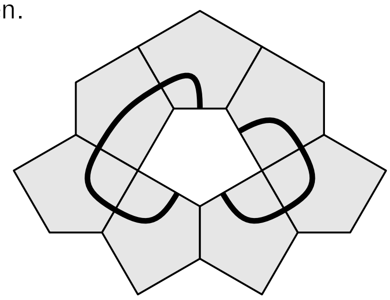
Klassenstufen 11 bis 13

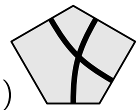
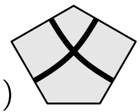
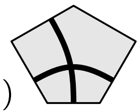
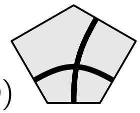
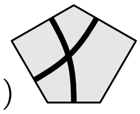
Donnerstag, 18. April 2024 Arbeitszeit: 75 Minuten

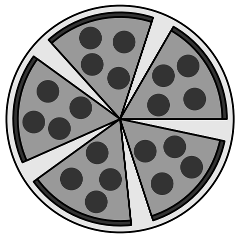
1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzuaddiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen, also 0,75 Punkte, 1 Punkt bzw. 1,25 Punkte. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner und andere elektronische Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben



A1 Welches der folgenden Teile passt so in die Mitte des Puzzles, dass dabei eine sich kreuzende, geschlossene Linie entsteht?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

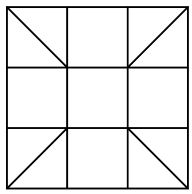


A2 Mattis hat eine Pizza in sechs gleich große Stücke geschnitten. Nachdem er ein Stück gegessen hat, ordnet er die restlichen Stücke so an, dass die Lücken zwischen benachbarten Stücken alle gleich groß sind. Wie groß ist jeweils der Winkel, den zwei benachbarte Stücke einschließen?

(**A**) 5° (**B**) 8° (**C**) 9° (**D**) 10° (**E**) 12°

A3 Welche der folgenden Zahlen ist um 2 kleiner als ein Vielfaches von 10, um 2 größer als eine Quadratzahl und doppelt so groß wie eine Primzahl?

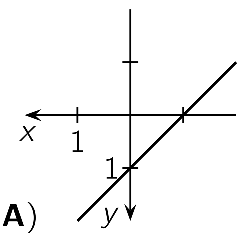
(**A**) 52 (**B**) 78 (**C**) 6 (**D**) 38 (**E**) 18

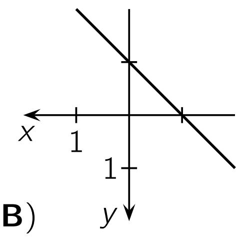


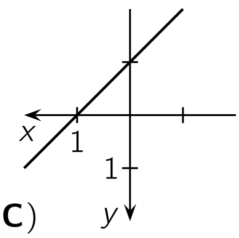
A4 Annika möchte alle dreieckigen und quadratischen Gebiete in der Abbildung ausmalen. Dabei sollen Gebiete, die an mindestens einem Punkt aneinandergrenzen, verschiedene Farben haben. Was ist die kleinste Anzahl an Farben, die Annika benötigt?

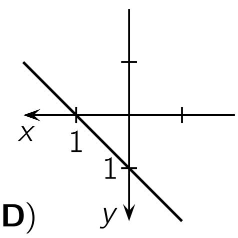
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

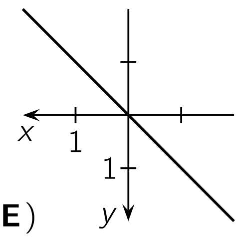
A5 Patricia hat ein ungewöhnliches Koordinatensystem gezeichnet. Die x-Achse zeigt nach links und die y-Achse nach unten. Wie sieht der Graph der Funktion f mit $y = f(x) = x + 1$ in diesem Koordinatensystem aus?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

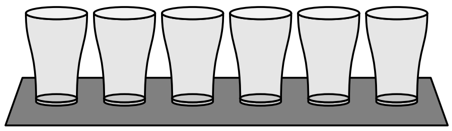
A6 Kaito hat einen Spielwürfel manipuliert. Die Wahrscheinlichkeit, eine 2, 3, 4 oder 5 zu würfeln, ist immer noch jeweils $\frac{1}{6}$. Aber die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, ist nun doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln?

(**A**) $\frac{2}{9}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{7}{36}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{5}{18}$

A7 $16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15} =$

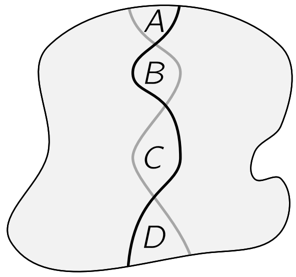
(**A**) 4^{19} (**B**) 4^{23} (**C**) 4^{31} (**D**) 4^{46} (**E**) 4^{60}

A8 Eren stellt 6 Gläser wie abgebildet auf den Tisch. In einem Schritt sucht er sich genau 4 dieser Gläser aus und dreht sie alle um. Was ist die kleinste Anzahl an Schritten, die Eren braucht, damit am Ende alle 6 Gläser verkehrt herum auf dem Tisch stehen?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

A9 Sowohl die schwarze als auch die graue Linie teilen die abgebildete Fläche jeweils in zwei gleich große Teile. A, B, C und D sind die Flächeninhalte der vier mittleren Gebiete. Welche Aussage ist sicher richtig?



(**A**) $A + B = C + D$ (**B**) $A + C = B + D$ (**C**) $A = D$
(**D**) $C = A + B + D$ (**E**) $A + D = B + C$

A10 Nora, Michelle und Pauline sind Drillinge. Ihre Lehrerin will wissen: „Wer von euch ist die Älteste?“ Nora antwortet: „Ich bin nicht die Älteste.“ Michelle antwortet: „Ich bin die Älteste.“ Pauline antwortet: „Ich bin nicht die Jüngste.“ Die drei haben sich einen Spaß gemacht, nur eine von ihnen hat die Wahrheit gesagt. In welcher Reihenfolge wurden die drei Mädchen geboren?

(**A**) Nora, Michelle, Pauline (**B**) Michelle, Nora, Pauline (**C**) Pauline, Nora, Michelle
(**D**) Pauline, Michelle, Nora (**E**) Nora, Pauline, Michelle

4-Punkte-Aufgaben

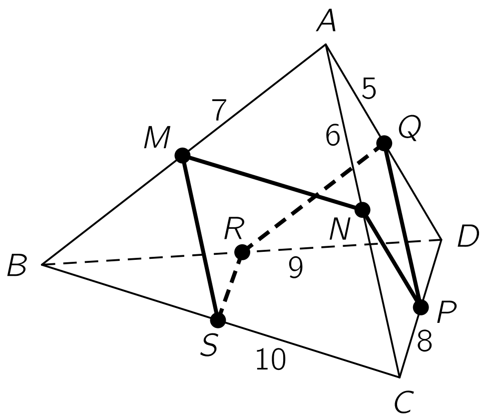
B1 Peter hat viele schwarze und weiße Würfel derselben Größe. Er möchte 27 dieser Würfel zu einem größeren $3 \times 3 \times 3$ Würfel zusammensetzen. Genau die Hälfte der Oberfläche dieses Würfels soll schwarz sein. Welches ist die kleinste Anzahl an schwarzen Würfeln, die Peter dafür verwenden muss?

(**A**) 13 (**B**) 12 (**C**) 11 (**D**) 10 (**E**) 9

B2 Seyma hat die Zahlen 6 und 15 jeweils mehrfach aufgeschrieben und dann ihr Produkt berechnet. Eine der folgenden Multiplikationen liefert ebenfalls das Ergebnis, das Seyma erhalten hat. Welche?

(**A**) $2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^8$ (**B**) $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{10}$ (**C**) $2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^8$ (**D**) $2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^5$ (**E**) $2^5 \cdot 3^{15} \cdot 5^3$

B3 Die Pyramide $ABCD$ hat die Kantenlängen $|AD| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 6\,\text{cm}$, $|AB| = 7\,\text{cm}$, $|CD| = 8\,\text{cm}$, $|BD| = 9\,\text{cm}$, $|BC| = 10\,\text{cm}$. Die Punkte M, N, P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der Kanten. Wie lang ist der eingezeichnete Rundweg $MNPQRSM$?

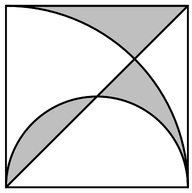


(**A**) 19 cm (**B**) 20 cm (**C**) 21 cm (**D**) 22 cm (**E**) 23 cm

B4 Gegeben ist eine natürliche Zahl n. Genau eine der folgenden Aussagen über n ist wahr, und die anderen vier sind falsch. Welche Aussage ist die wahre Aussage?

(**A**) n ist durch 3 teilbar (**B**) n ist durch 6 teilbar
(**C**) n ist eine Primzahl (**D**) $n = 2$ (**E**) n ist ungerade

B5 In ein Quadrat mit Seitenlänge 6 cm wurden eine Diagonale, ein Halbkreis und ein Viertelkreis eingezeichnet (s. Abb.). Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?

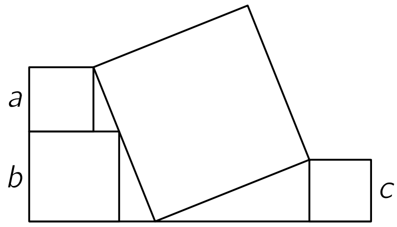


(**A**) $9\,\text{cm}^2$ (**B**) $3\pi\,\text{cm}^2$ (**C**) $\frac{10}{3}\pi\,\text{cm}^2$ (**D**) $12\,\text{cm}^2$ (**E**) $(6\pi - 9)\,\text{cm}^2$

B6 Es seien p und q positive Zahlen mit $p < q$. Welcher der folgenden Brüche hat den größten Wert?

(**A**) $\frac{3p+q}{4}$ (**B**) $\frac{2p+q}{3}$ (**C**) $\frac{p+q}{2}$ (**D**) $\frac{p+2q}{3}$ (**E**) $\frac{p+3q}{4}$

B7 Rechts sind vier Quadrate abgebildet. Die Seitenlängen der drei kleinen Quadrate sind a, b und c. Welche Seitenlänge hat das große Quadrat?



(**A**) $\frac{1}{2}(a+b+c)$ (**B**) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (**C**) $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$
(**D**) $\sqrt{(b-a)^2+c^2}$ (**E**) $\sqrt{ab+bc+ac}$

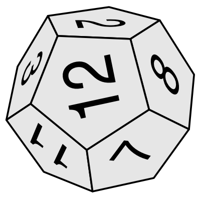
B8 Zuzanna hat Steinpilze gesammelt und möchte sie im Ofen bei niedriger Temperatur trocknen. Frische Steinpilze bestehen zu 90 % aus Wasser. Nach einiger Zeit im Ofen macht das Wasser nur noch 20 % der Masse aus. Um wie viel Prozent hat sich die Masse der Pilze dabei verringert?

(**A**) um 72,5 % (**B**) um 75 % (**C**) um 85 % (**D**) um 87,5 % (**E**) um 90 %

B9 Wenn man bei der 4-stelligen Zahl $N = \overline{pqrs}$ zwischen q und r ein Dezimalkomma setzt, so erhält man den Durchschnitt (arithmetisches Mittel) der beiden 2-stelligen Zahlen $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$. Welche Quersumme hat N?

(**A**) 14 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 25 (**E**) 27

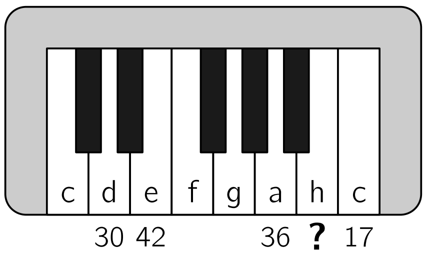
B10 Henriette hat mehrere 12-seitige Spielwürfel. Die Seitenflächen sind mit den Zahlen von 1 bis 12 beschriftet. Wenn Henriette alle Spielwürfel gleichzeitig würfelt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der Spielwürfel eine 12 zeigt, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Spielwürfel eine 12 zeigt. Wie viele 12-seitige Spielwürfel hat Henriette?



(**A**) 5 (**B**) 8 (**C**) 11 (**D**) 18 (**E**) 23

5-Punkte-Aufgaben

C1 Joseph hat seiner Nichte zum zweiten Geburtstag ein Kinder-Klavier geschenkt. Sie probiert es gleich aus und schlägt wieder und wieder mit der ganzen Hand auf die Tasten. Dabei drückt sie immer 4 benachbarte weiße Tasten auf einmal. Das d drückt sie insgesamt 30 Mal, das e 42 Mal, das a 36 Mal und das hohe c 17 Mal. Wie oft hat sie das h gedrückt?



(**A**) 19 Mal (**B**) 24 Mal (**C**) 27 Mal (**D**) 32 Mal (**E**) 35 Mal

C2 Es sind a, b und c drei verschiedene ganze Zahlen ungleich 0. Für die reelle Zahl x gilt sowohl $ax^2 + bx + c = 0$ als auch $bx^2 + ax + c = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist dann sicher wahr?

(**A**) $ac = b$ (**B**) $a^2 - b^2 = c^2$ (**C**) $ab = c$ (**D**) $a + b + c = 0$ (**E**) $2bc = a^2$

C3 Tristan hat sechs Karten, bei denen auf der Vorderseite und auf der Rückseite jeweils eine Zahl steht. Die Zahlenpaare auf den sechs Karten sind $(5,12)$, $(3,11)$, $(0,16)$, $(7,8)$, $(4,14)$ und $(9,10)$. Tristan legt diese sechs Karten auf die abgebildeten freien Felder. Was ist das kleinste Ergebnis, das die Rechnung haben kann?

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

(**A**) -24 (**B**) -25 (**C**) -26 (**D**) -27 (**E**) -28

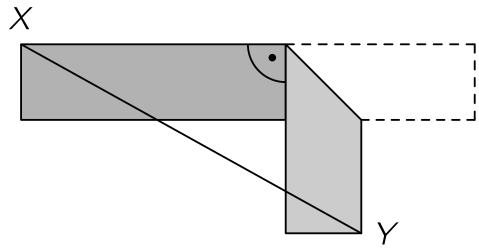
C4 Zwei Kerzen mit gleicher Höhe sind verschieden dick. Sie werden gleichzeitig angezündet und brennen gleichmäßig ab. Die eine Kerze brennt in genau 5 Stunden vollständig ab und die andere in 4 Stunden. Wie lange müssen die beiden Kerzen brennen, bis die eine Kerze 3-mal so hoch ist wie die andere?

(**A**) $\frac{40}{11}$ Stunden (**B**) $\frac{45}{12}$ Stunden (**C**) $\frac{63}{20}$ Stunden (**D**) $\frac{54}{17}$ Stunden (**E**) $\frac{47}{14}$ Stunden

C5 Die Polynomfunktion p mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ erfüllt für alle reellen Zahlen x die Gleichung $p(x+1) = x^2 - x + 2 \cdot p(6)$. Dann ist $a + b + c =$

(**A**) -40 (**B**) -36 (**C**) -6 (**D**) 12 (**E**) 40

C6 Ein rechteckiger Papierstreifen ist 12 cm lang und 2 cm breit. Das rechte Ende soll an einer Stelle so gefaltet werden, dass es senkrecht nach unten zeigt. Was ist der kleinste Abstand, den die Eckpunkte X und Y nach dem Falten haben können?



(**A**) $6\sqrt{2}$ cm (**B**) $7\sqrt{2}$ cm (**C**) 10 cm
(**D**) 8 cm (**E**) $(6+\sqrt{2})$ cm

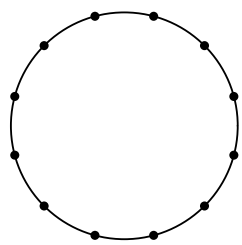
C7 Die vierstellige Zahl $\overline{abcd}$ hat die Eigenschaft $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$. Welche Ziffer ist a?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

C8 Für die reellen Zahlen x, y, z gilt $2^x = 3$ und $2^y = 7$ und $6^z = 7$. Wie lässt sich z mithilfe von x und y berechnen?

(**A**) $z = \frac{x}{y} + 1$ (**B**) $z = \frac{y}{x} - 1$ (**C**) $z = \frac{x}{y-1}$ (**D**) $z = y - \frac{1}{x}$ (**E**) $z = \frac{y}{1+x}$

C9 Auf einem Kreis wurden 12 Punkte eingezeichnet, die den Kreis in 12 gleich lange Bögen teilen. Wie viele Dreiecke gibt es, deren Eckpunkte 3 der vorgegebenen Punkte sind und die mindestens einen Innenwinkel haben, der 45° groß ist?



(**A**) 48 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 84 (**E**) 96

C10 Emily und Daniel spielen ein Spiel. Auf ein Blatt Papier schreiben sie die natürlichen Zahlen von 1 bis 7. Abwechselnd suchen sie sich eine noch vorhandene Zahl aus und streichen diese und alle ihre Teiler durch. Wer die letzte Zahl durchstreicht, gewinnt. Emily beginnt, aber Daniel nutzt jede Möglichkeit, um am Ende selbst zu gewinnen. Welche Zahl muss sich Emily im ersten Zug aussuchen, damit sie das Spiel gewinnen kann?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5 oder 7