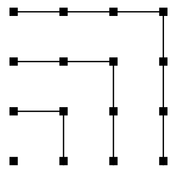
Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 18. März 2010 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben



1. Beim Blick auf das rechts stehende Bild lässt sich ablesen: $1+3+5+7=4\cdot 4$. Welchen Wert hat $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?

(**A**) $14\cdot 14$ (**B**) $9\cdot 9$ (**C**) $13\cdot 13$ (**D**) $10\cdot 10$ (**E**) $16\cdot 16$

2. Wenn die Summe der Zahlen in beiden Zeilen der Tabelle gleich ist, welche Zahl gehört dann an die Stelle des Sterns?

1	2	3	4	5	12345
−1	−2	−3	−4	−5	★

(**A**) 12465 (**B**) 12321 (**C**) 12456 (**D**) 12375 (**E**) 12330

3. „In meiner Mathe-AG sind alle Teilnehmer mindestens 17 Jahre alt“, verkündet die AG-Leiterin. Da irrt sie sich aber. Folglich gilt gewiss, dass

(**A**) alle genau 17 Jahre alt sind.
(**B**) alle älter als 17 Jahre sind.
(**C**) keiner bereits 17 Jahre alt ist.
(**D**) es einen gibt, der jünger als 17 Jahre ist.
(**E**) es einen gibt, der 18 Jahre alt ist.

4. Wie viele Paare reeller Zahlen (a, b) sind Lösung der Gleichung $(a-3)^2+(b-2)^2=0$?

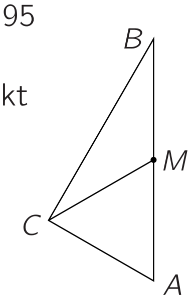
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 36 (**E**) 0

5. Aufziehosterhasen werden für den Versand einzeln in kleine würfelförmige Schachteln verpackt. Diese kommen dann in größere, ebenfalls würfelförmige Schachteln. Auf den Boden einer großen Schachtel passen genau 16 kleine. Wie viele kleine Schachteln passen maximal in eine große Schachtel?

(**A**) 32 (**B**) 56 (**C**) 64 (**D**) 128 (**E**) 256

6. Wie viele 4-stellige, durch 5 teilbare natürliche Zahlen gibt es, deren Ziffern alle ungerade sind?

(**A**) 900 (**B**) 625 (**C**) 250 (**D**) 125 (**E**) 95



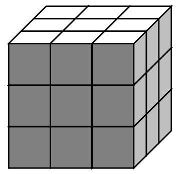
7. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C. M sei der Mittelpunkt der Hypotenuse AB und $\measuredangle CAB = 60°$. Dann ist $\measuredangle BMC$ gleich

(**A**) 105° (**B**) 108° (**C**) 110° (**D**) 112° (**E**) 120°

8. Welches ist die letzte Ziffer der Zahl $17^3\cdot 22^4\cdot 33^4$?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

9. Ein Würfel (s. Abb.) besteht aus 27 kleinen Würfeln, von denen ein jeder eine Oberfläche von 24 cm^2 hat. Wie groß ist die Oberfläche des großen Würfels?



(**A**) 216 cm^2 (**B**) 182 cm^2 (**C**) 156 cm^2 (**D**) 144 cm^2 (**E**) 96 cm^2

10. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Kanten eines Prismas angeben?

(**A**) 100 (**B**) 111 (**C**) 112 (**D**) 115 (**E**) 125

4-Punkte-Aufgaben

11. In jeder Frühstückspause findet auf dem Schulhof ein reger Tauschmarkt statt. Die Konditionen sind allen bekannt (s. Abb.). Zora will sich mit Gummibärchen einen Apfel, ein halbes Wurstbrot und eine Streuselschnecke ertauschen. Wie viele Gummibärchen muss sie dafür hergeben?

1 Streuselschnecke	$\Longleftrightarrow$	3 halbe Wurstbrote
1 Apfel + 9 Gummibärchen	$\Longleftrightarrow$	2 halbe Wurstbrote
16 Gummibärchen	$\Longleftrightarrow$	1 Apfel

(**A**) 55 (**B**) 66 (**C**) 77 (**D**) 88 (**E**) 99

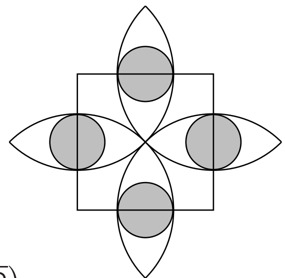
12. Irenes Bruder übt Addieren. Er hat sich 5 ganze Zahlen ausgesucht und sämtliche möglichen Summen aus 2 dieser 5 Zahlen gebildet: $-3, -1, 0, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 9$. „Welches deine 5 Zahlen sind, weiß ich zwar nicht, aber die Summe der 5 Zahlen kann ich ausrechnen“, sagt Irene. Die Summe ist

(**A**) 0 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 11 (**E**) 12

13. Die ganzen Zahlen x und y erfüllen die Gleichung $2x = 5y$. Nur eine der folgenden Zahlen kann unter dieser Bedingung $x + y$ sein. Welche?

(**A**) 27 (**B**) 30 (**C**) 32 (**D**) 35 (**E**) 41

14. Um die Eckpunkte eines Quadrates der Seitenlänge 2 sind vier Halbkreise konstruiert, die sich im Mittelpunkt des Quadrats schneiden. Die vier kleineren grauen Kreise, deren Zentren in den Mittelpunkten der Quadratseiten liegen, berühren je zwei Halbkreise von innen (s. Abb.). Welchen Flächeninhalt haben diese vier grauen Kreise insgesamt?

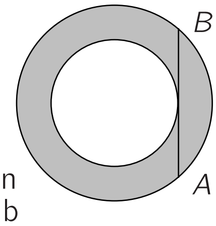


(**A**) $2\sqrt{2}\pi$ (**B**) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ (**C**) π (**D**) $\frac{\pi}{4}$ (**E**) $4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\pi$

15. Die drei Zahlen $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ und $\sqrt[6]{7}$ sind unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente einer geometrischen Folge. Dann ist das nächste Element in dieser Folge

(**A**) $\sqrt[9]{7}$ (**B**) $\sqrt[12]{7}$ (**C**) $\sqrt[5]{7}$ (**D**) $\sqrt[10]{7}$ (**E**) 1

16. Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt bilden einen Kreisring. Die Sehne $\overline{AB}$ im großen Kreis ist Tangente an den kleineren Kreis; sie ist 16 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat der Kreisring?



(**A**) 32π cm^2 (**B**) 48π cm^2 (**C**) 64π cm^2 (**D**) $32\pi^2$ cm^2 (**E**) das hängt von den Radien ab

17. Es sei N der größte Wert, den der Term $1\star2\star3\star4\star5\star6\star7\star8\star9\star10$ annehmen kann, wenn jedes Sternchen entweder durch „+“ oder durch „·“ ersetzt wird. Welches ist der kleinste Primfaktor von N?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) eine Primzahl größer als 7

18. An jede Ecke eines Fünfecks stellen wir uns eine natürliche Zahl geschrieben vor. Keine dieser Zahlen hat mit einer benachbarten einen gemeinsamen Teiler > 1, aber jede der Zahlen hat mit jeder nicht-benachbarten Zahl stets einen gemeinsamen Teiler > 1. So etwas ist auf vielfältige Weise möglich. Welche der folgenden Zahlen kann *gewiss nicht* an einer der Ecken stehen?

(**A**) 87 (**B**) 111 (**C**) 121 (**D**) 127 (**E**) 133

19. Von einem Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen ist bekannt, dass eine der Seitenlängen 13 ist. Außerdem ist das Produkt der beiden anderen Seitenlängen 105. Welchen Umfang hat dieses Dreieck?

(**A**) 35 (**B**) 39 (**C**) 51 (**D**) 69 (**E**) 119

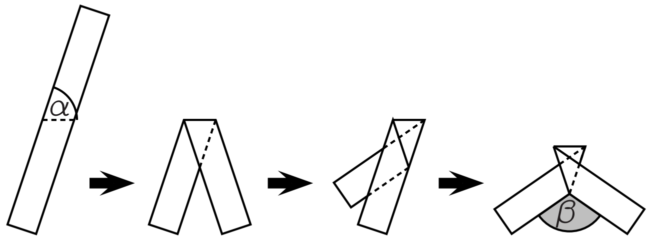
20. Am Pokerturnier „Viertel-Cup“ nahmen diesmal exakt 100 Spieler teil. Das Originelle ist, dass bei diesem Turnier jeder Platz vom Ersten bis zum Hundertsten ausgespielt wird und am Ende jeder für Essen und Getränke so viele Viertel-Euro bezahlt, wie seine Platzierung angibt: der Sieger zahlt also 0,25 €, der zweite 0,50 €, der dritte 0,75 €, usw. Als der Veranstalter die Einnahmen des Abends zählt, kommt er auf 1207 €. „Gemeinheit, da haben ja welche geschummelt“, murrt er. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Teilnehmern, die einen falschen Betrag gezahlt haben?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

5-Punkte-Aufgaben

21. Ein Papierstreifen ist dreimal gefaltet worden (s. Abb.). Wie groß ist β, wenn $\alpha = 70°$ ist?

(**A**) 140° (**B**) 130° (**C**) 120° (**D**) 110° (**E**) 100°

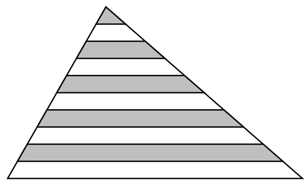


22. Ich mache ein Würfelexperiment. In jedem Versuch würfle ich mit einem Würfel dreimal nacheinander und notiere die drei Augenzahlen genau dann, wenn die Augenzahl des dritten Wurfs gleich der Summe der Augenzahlen des ersten und zweiten Wurfs ist. Wie groß ist bei diesen notierten Dreierfolgen die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei Würfen mindestens eine 2 ist?

(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{91}{216}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{8}{15}$ (**E**) $\frac{7}{12}$

23. Parallel zur Grundlinie eines Dreiecks werden Linien gezeichnet, die die beiden anderen Seiten in 10 gleich große Teile teilen. Jeder zweite Streifen wird grau eingefärbt (s. Abb.). Wie viel Prozent der Dreiecksfläche ist grau?

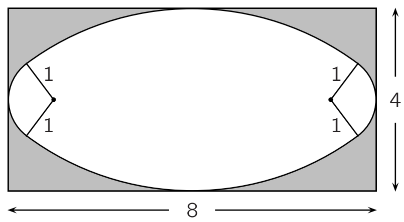
(**A**) 41,75 % (**B**) 42,5 % (**C**) 45 % (**D**) 46 % (**E**) 47,5 %



24. Wie viele rechtwinklige Dreiecke gibt es, deren drei Eckpunkte gleichzeitig Eckpunkte eines gegebenen regelmäßigen 10-Ecks $A_1A_2A_3 \dots A_9A_{10}$ sind?

(**A**) 40 (**B**) 42 (**C**) 48 (**D**) 64 (**E**) 80

25. Karl möchte aus Gummi einen 4 cm breiten und 8 cm langen ovalen Stempel schneiden. Ein Muster des horizontal und vertikal symmetrischen Ovals hat er mit Hilfe von vier Kreisbögen erstellt (s. Abb.). In den vier Berührungspunkten stimmen die Tangenten der jeweils aneinanderstoßenden Bögen überein. Wie groß muss Karl den Radius der großen Kreisbögen wählen, wenn der kleine Radius 1 cm beträgt?



(**A**) 6 cm (**B**) 6,5 cm (**C**) 7 cm (**D**) 7,5 cm (**E**) 8 cm

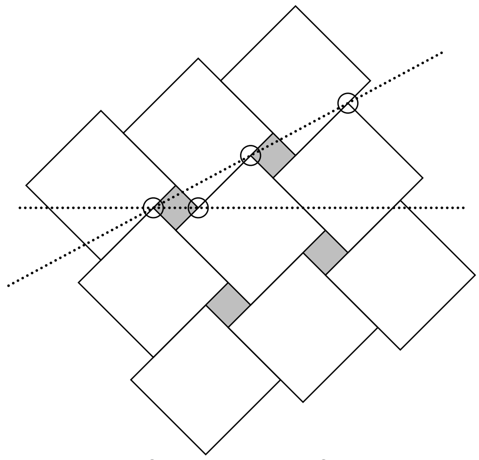
26. Die reellwertige Funktion f erfüllt für alle $x > 0$ die Gleichung $2f(x) + 3f\left(\frac{100}{x}\right) = 5x$. Welchen Wert hat $f(1)$?

(**A**) 1 (**B**) 298 (**C**) 77 (**D**) 0 (**E**) 1011

27. Ihre Augen leuchteten, als die Piraten Sparrow, Barbossa und Turner die Schatzkiste öffneten und den Berg Goldmünzen sahen. Nach alter Piratentradition nahm sich zuerst Sparrow eine Münze, dann Barbossa zwei, Turner drei, dann Sparrow vier, Barbossa fünf, usw. So wurden die Goldmünzen *ohne Rest* aufgeteilt. Zum Schluss hatte Barbossa 20 Münzen mehr als Turner, und Sparrow bekam

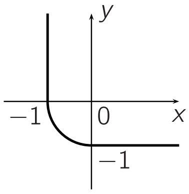
(**A**) 117 Münzen. (**B**) 126 Münzen. (**C**) 145 Münzen. (**D**) 187 Münzen. (**E**) 210 Münzen.

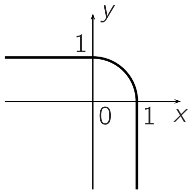
28. Der Fußboden der Burg, die wir für ein Geschichtsprojekt besuchen, wird gerade restauriert. Die Restauratorin zeigt uns historische Dokumente mit einem Bild. „Die kleinen Fliesen sind 9 cm × 9 cm“, erklärt sie uns, „und der Fliesenverschiebungswinkel, der durch die markierten Punkte festgelegt wird, ist in den Aufzeichnungen mit 30° verzeichnet. Daraus kann man dann die Kantenlänge der großen Fliesen berechnen.“ Sie beträgt

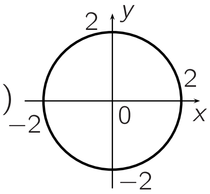


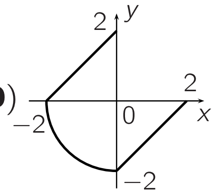
(**A**) $9 \cdot (2 \cdot \sqrt{3})$ cm (**B**) $9 \cdot (2 + \sqrt{3})$ cm (**C**) $9 \cdot 2$ cm
(**D**) $9 \cdot (3 \cdot \sqrt{2})$ cm (**E**) $9 \cdot (3 + \sqrt{2})$ cm

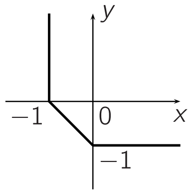
29. Welcher der Graphen gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?

(**A**)


(**B**)


(**C**)


(**D**)


(**E**)


30. Die Strichcodes, die wir untersuchen wollen, bestehen abwechselnd aus schwarzen und weißen Strichen und beginnen und enden schwarz. Die Striche haben die Breite 1 oder 2, und die Gesamtbreite eines Codes soll 14 sein (s. Beispiel rechts). Wie viele verschiedene Codes sind möglich, wenn stets von links nach rechts gelesen wird?

(**A**) 116 (**B**) 132 (**C**) 116 (**D**) 294 (**E**) 305