Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 19. März 2009 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. 200 Fische hab ich in meinem Aquarium, davon ist 1 % blau, der Rest gelb. Wie viele gelbe Fische müsste ich aus dem Aquarium nehmen, um zu erreichen, dass unter den im Aquarium verbleibenden Fischen 2 % blau sind?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 50 (**D**) 98 (**E**) 100

2. Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

(**A**) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ (**B**) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (**C**) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ (**D**) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ (**E**) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

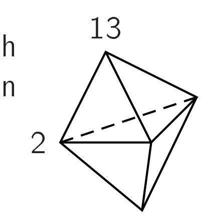
3. Marie, Nina und Peer sitzen für die Vorbereitung auf eine Prüfung in einer stillen Ecke in einem Cafe. Im Laufe des Nachmittags bestellen sie jeder 3 Tee, 2 Stück Apfelkuchen und 1 Paar Würstchen. Welches könnte der Betrag auf ihrer gemeinsamen Rechnung sein?

(**A**) 39,20 € (**B**) 38,20 € (**C**) 37,20 € (**D**) 36,20 € (**E**) 35,20 €

4. Für wie viele positive ganze Zahlen n ist $n^2 + n$ eine Primzahl?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) mehr als 2, endlich viele (**E**) unendlich viele

5. Der abgebildete Körper hat 6 dreieckige Seitenflächen. An jeder Ecke befindet sich eine Zahl, zwei dieser Zahlen sind vorgegeben. Wenn die Summen der Eckzahlen an jeder der 6 Seitenflächen gleich sind, wie groß ist dann die Summe aller 5 Zahlen?



(**A**) 21 (**B**) 27 (**C**) 30 (**D**) 32 (**E**) 43

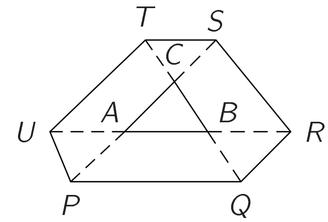
6. Die Kreise $k_1(A;13)$ und $k_2(B;15)$ schneiden sich in den Punkten P und Q. Es ist $\overline{PQ} = 24$. Von den folgenden Zahlen kann nur eine die Länge der Strecke $\overline{AB}$ sein. Welche?

(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 14 (**E**) 18

7. Wenn die Länge einer Seite eines Rechtecks um 20 % zunimmt, während die andere um 20 % kürzer wird, dann gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks:

(**A**) Er nimmt um 20 % ab. (**B**) Er nimmt um 4 % ab. (**C**) Er bleibt unverändert.
(**D**) Er wächst um 20 %. (**E**) Er wächst um 4 %.

8. Die Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ seien derart in beide Richtungen bis zu den Punkten P, Q, R, S, T und U verlängert, dass $\overline{TC} = \overline{CB} = \overline{BQ}$, $\overline{PA} = \overline{AC} = \overline{CS}$ und $\overline{UA} = \overline{AB} = \overline{BR}$ gilt (s. Skizze). Wenn der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ gleich 1 ist, so ist der Flächeninhalt von $PQRSTU$ gleich



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 13

9. Im Wäschefach sind zwei weiße, drei rote und vier blaue Socken. Drei der Socken haben ein Loch, und Lisa weiß nicht, welche. Sie möchte heute mit gleichfarbigen, lochfreien Socken zur Prüfung gehen. Wie viele muss sie mindestens – ohne auf Löcher und Farbe zu testen – aus dem Fach nehmen, um mit Sicherheit ein gleichfarbiges Paar ohne Löcher dabei zu haben?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

10. Ein 5×5-Quadrat auf kariertem Papier soll bunt ausgemalt werden, die linke obere Ecke ist schon oliv (o), pink (p), rot (r) bzw. schwarz (s). Zwei weitere Karos sind ebenfalls bereits gefärbt. Wenn Karos, die eine Kante oder eine Ecke gemeinsam haben, nicht gleich gefärbt werden dürfen, welche Farbe ist dann für das Karo mit dem Fragezeichen vorzusehen?

o	p			
r	s			
		p		
p			**?**	

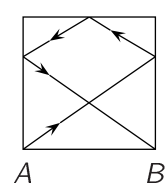
(**A**) nur o (**B**) nur r (**C**) o oder p (**D**) r oder s (**E**) jede Farbe ist möglich

4-Punkte-Aufgaben

11. Wegen einer Straftat werden 17 Personen nacheinander verhört, von denen bekannt ist, dass sie entweder immer lügen oder immer die Wahrheit sprechen. Die 2. und jede folgende Person sagt aus, dass die vor ihr befragte Person gelogen habe. Nach der 17. Person wird erneut die 1. Person befragt, die nun behauptet, dass alle anderen gelogen hätten. Wie viele der Personen sagen die Wahrheit?

(**A**) keine (**B**) 1 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 16

12. Im Winter wird bei uns oft eine quadratische $30\,\mathrm{m} \times 30\,\mathrm{m}$ große Eisfläche gespritzt. Neben Schlittschuhlaufen findet dort auch Puck-Schießen statt: von Ecke A muss über die Bande Ecke B getroffen werden. Wie lang (in m) ist der gezeichnete Puck-Weg? (Achtung: Der Puck wird mit *dem* Winkel reflektiert, mit dem er auf die Bande trifft.)



(**A**) 35 (**B**) $30\sqrt{13}$ (**C**) 8 (**D**) $60\sqrt{3}$ (**E**) $30(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

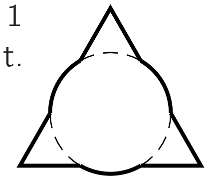
13. Zur Regionalrunde der Mathematikolympiade sind 100 Teilnehmer zugelassen; es sind 4 Aufgaben zu lösen. 90 Wettbewerber lösten Aufgabe 1, 85 Aufgabe 2, 78 Aufgabe 3 und 67 Aufgabe 4. Welches ist die kleinstmögliche Zahl von Teilnehmern, die alle Aufgaben gelöst haben?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

14. Astrid und Jens trainieren für ihr Sportabitur. Runde für Runde drehen sie in der Halle. Jens, der schneller als Astrid ist, braucht 3 Minuten für eine Runde. Sie sind zusammen losgelaufen, und nach 8 Minuten hat Jens Astrid zum ersten Mal überholt. Wie lange braucht Astrid für eine Runde?

(**A**) 6 min (**B**) 8 min (**C**) 4 min 30 s (**D**) 4 min 48 s (**E**) 4 min 20 s

15. Über ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 3 wird ein Kreis mit dem Radius 1 gelegt, wobei der Kreismittelpunkt auf den Schwerpunkt des Dreiecks zu liegen kommt. Welchen Umfang hat die neu entstandene Figur?

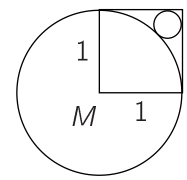


(**A**) $3 + 2\pi$ (**B**) $6 + \pi$ (**C**) $9 + \frac{\pi}{3}$ (**D**) 3π (**E**) $6 + \frac{2\pi}{3}$

16. 2009 Kängurus, ein jedes entweder hell oder dunkel von Farbe, vergleichen ihre Größe. Es ist bekannt, dass genau eines der hellen Kängurus größer ist als genau 8 der dunklen, genau eines ist größer als genau 9 der dunklen, genau eines ist größer als genau 10 der dunklen usw. Genau eines der hellen Kängurus ist größer als alle dunklen. Wie viele helle Kängurus genau sind das?

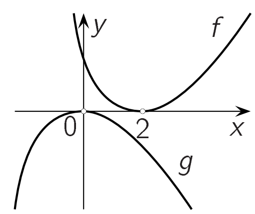
(**A**) 503 (**B**) 1000 (**C**) 1001 (**D**) 1002 (**E**) 1003

17. Seitenlänge des Quadrats und Radius des großen Kreises seien gleich 1. Welchen Radius hat der kleine Kreis, der den großen Kreis von außen und das Quadrat von innen berührt?



(**A**) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (**D**) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (**E**) $3 - 2\sqrt{2}$

18. Die Abbildung rechts zeigt die Graphen der reellen Funktionen f und g. Welche der folgenden Relationen könnte zwischen den beiden Funktionen bestehen?



(**A**) $g(x-2) = -f(x)$ (**B**) $g(x) = f(x+2)$ (**C**) $g(x) = -f(-x+2)$
(**D**) $g(-x) = f(-x+2)$ (**E**) $g(2-x) = -f(x)$

19. Ein 6 cm×8 cm-Rechteck bedeckt ein Dreieck bis zu 80 %. Legt man das Dreieck auf das Rechteck, so werden maximal $\frac{2}{3}$ der Rechtecksfläche bedeckt. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

(**A**) $22\frac{4}{5}\,\mathrm{cm}^2$ (**B**) $24\,\mathrm{cm}^2$ (**C**) $36\,\mathrm{cm}^2$ (**D**) $40\,\mathrm{cm}^2$ (**E**) $60\,\mathrm{cm}^2$

20. Wie viel Prozent des Volumens einer Kugel wird von dem dieser Kugel einbeschriebenen Würfel (d. h. die Würfeleckpunkte liegen auf der Kugeloberfläche) eingenommen?

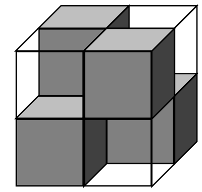
(**A**) etwa 12 % (**B**) etwa 37 % (**C**) etwa 65 % (**D**) etwa 79 % (**E**) etwa 94 %

5-Punkte-Aufgaben

21. Wie viele 12-stellige Zahlen mit den Ziffern 1, 2 und 3 existieren, bei denen sich die benachbarten Ziffern um genau 1 unterscheiden?

(**A**) 32 (**B**) 64 (**C**) 128 (**D**) 512 (**E**) 4096

22. Ein $2 \times 2 \times 2$-Würfel wird aus 4 durchsichtigen und 4 undurchsichtigen $1 \times 1 \times 1$-Würfeln gebildet. Sie sind so angeordnet, dass der $2 \times 2 \times 2$-Würfel aus jeder Richtung parallel zu den Kanten undurchsichtig ist. Wie viele undurchsichtige $1 \times 1 \times 1$-Würfel sind mindestens nötig, um einen $3 \times 3 \times 3$-Würfel in diesem Sinne undurchsichtig zu machen?

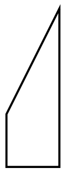
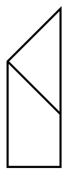
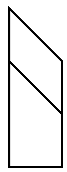
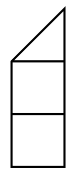
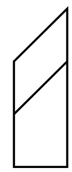


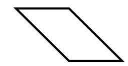
(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

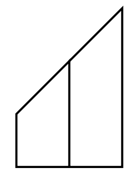
23. Es sei Z die Anzahl aller 8-stelligen Zahlen mit 8 voneinander und von 0 verschiedenen Ziffern. Wie viele dieser Zahlen sind durch 9 teilbar?

(**A**) $\frac{Z}{8}$ (**B**) $\frac{Z}{3}$ (**C**) $\frac{Z}{9}$ (**D**) $\frac{8Z}{9}$ (**E**) $\frac{7Z}{8}$

24. Rechts sind zwei Skizzen desselben, von ebenen Flächen begrenzten Körpers abgebildet. Welche der folgenden Skizzen gibt den Anblick von links wieder?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 


von oben

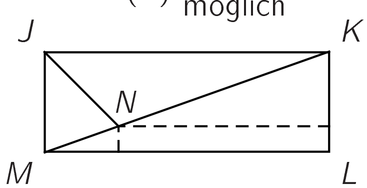

von vorn

25. An einem Schulwettbewerb beteiligten sich 55 Kinder. In die Korrekturliste wurde hinter jeden Namen bei jeder Aufgabe eingetragen, ob sie richtig (+), falsch (−) oder nicht gelöst (0) wurde. Dabei bemerkte ein Lehrer etwas Kurioses: Die Anzahl der + und die Anzahl der − war von Kind zu Kind unterschiedlich; stimmten also zwei in der Anzahl der + überein, so gewiss nicht in der Anzahl der −, und umgekehrt. Wie viele Aufgaben waren mindestens zu bearbeiten?

(**A**) 12 (**B**) 11 (**C**) 10 (**D**) 9 (**E**) 8

26. Ein großes Quadrat ist in 2009 kleinere Quadrate zerteilt worden, sämtlich mit ganzzahligen Seitenlängen. Welches ist die kleinstmögliche Seitenlänge des großen Quadrats?

(**A**) 44 (**B**) 45 (**C**) 46 (**D**) 503 (**E**) das ist nicht möglich



27. Im Rechteck $JKLM$ schneidet die Winkelhalbierende von $\measuredangle MJK$ die Diagonale KM im Punkt N. Die Abstände von N zu LM und KL seien 1 bzw. 8. Dann ist die Länge von $\overline{LM}$ gleich

(**A**) $8 + 2\sqrt{2}$ (**B**) $11 - \sqrt{2}$ (**C**) 10 (**D**) $8 + 3\sqrt{2}$ (**E**) $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

28. Die Folge $\{a_n\}$ von ganzen Zahlen ist folgendermaßen definiert: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}^2$ für $n \geq 0$. Dann ist der Rest, den a_{2009} bei Division durch 7 lässt, gleich

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 6

29. In einem magischen Quadrat sind die Summen der Zahlen in allen Zeilen, allen Spalten und den beiden Diagonalen gleich. Welche Zahl ist in die linke obere Ecke zu schreiben, damit ein magisches Quadrat entstehen könnte?

?		
		47
	63	

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 55 (**D**) 110 (**E**) es gibt mehrere Möglichkeiten

30. Wir ordnen jeder zweistelligen Zahl z diejenige Zahl $t(z)$ zu, die entsteht, wenn sämtliche Teiler von z, einschließlich 1 und z selbst, der Größe nach hintereinander geschrieben werden. So ist z. B. $t(14) = 12714$. Wie viele Stellen hat die größte dieser Zahlen $t(z)$?

(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24