Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 16. März 2000 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen; wenn keine Antwort gegeben wird, gibt es 0 Punkte. Mehr als ein Antwortkreuz zu einer Frage wird als falsche Antwort bewertet.
3. Jeder Teilnehmer bekommt 30 Punkte als Grundpunktzahl zu Beginn. Damit wird eine negative Gesamtpunktzahl verhindert. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150.
4. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. Ein Känguru beginnt am Morgen in Sydney sein Trainingsspringen. Es bewegt sich zuerst 10 km nach Norden, dann 10 km nach Osten, anschließend 6 km nach Süden, dann 2 km nach Westen und nun wieder 8 km nach Norden, dann 4 km nach Westen und schließlich 9 km nach Süden. Wie viele Kilometer ist der Endpunkt dieses Trainingsspringens vom Startpunkt entfernt? (Erdkrümmung soll unberücksichtigt bleiben)

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) $\sqrt{5}$ (**D**) 5 (**E**) $10\sqrt{2}$

2. Eine böse Hexe lügt stets von Montag bis Mittwoch, während sie an den anderen Tagen stets die Wahrheit spricht. An welchem Wochentag kann sie sagen: „Ich habe gestern gelogen und werde morgen lügen.“?

(**A**) am Montag (**B**) am Dienstag (**C**) am Donnerstag
(**D**) am Sonntag (**E**) solch einen Tag gibt es nicht

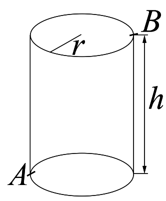
3. Wenn a eine positive ganze Zahl ist, für die die Zahl Z mit $Z = a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$ aus lauter gleichen Ziffern besteht, welche Ziffer kann das sein?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) 9 (**E**) keine

4. Maries Mutter ist 4 Jahre älter als ihr Vater. Das Durchschnittsalter der Eltern beträgt 39 Jahre. Das Durchschnittsalter von Marie und ihrer Mutter ist 23 Jahre. Wie alt ist Marie?

(**A**) 5 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 11 (**E**) 12

5. Wie groß ist die Entfernung des Punktes A vom Punkt B, gemessen auf der Zylinderoberfläche, wenn $r = 1$ und $h = 6$ ist?



(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) $2\sqrt{10}$
(**D**) $\sqrt{\pi^2 + 36}$ (**E**) $\sqrt{\pi^2 + 9}$

6. Fünf Gentlemen – Schulz, Meier, Müller, Lehmann und Krause – treffen einander. Schulz begrüßt genau einen der Gentlemen mit Handschlag, und auch Meier tauscht nur mit einem einen Handschlag, während Müller, Lehmann und Krause je zwei mit Handschlag begrüßen. Es ist bekannt, dass sich Schulz und Krause die Hand gaben. Welche beiden haben sich gewiss nicht die Hände gereicht?

(**A**) Krause mit Lehmann (**B**) Krause mit Müller (**C**) Meier mit Müller
(**D**) Meier mit Krause (**E**) Meier mit Lehmann

7. Sisyphus muss jeden Tag einen schweren Stein einen Berg nach oben schieben. Am ersten Tag braucht er für den Weg hoch und zum Fuß des Berges zurück insgesamt 7 Stunden. An den folgenden Tagen geht er jeden Tag aufwärts halb so schnell wie am Tag zuvor, läuft abwärts jedoch doppelt so schnell. Angenommen, er braucht am zweiten Tag insgesamt 8 Stunden, wie viele Stunden braucht er dann am dritten Tag?

(**A**) 9 h (**B**) 8 h 30 min (**C**) 7 h (**D**) 13 h (**E**) 10 h 5 min

8. Welche der folgenden Zahlen unterscheidet sich am wenigsten von $\sin 1°$?

(**A**) $\frac{\pi}{360}$ (**B**) $\frac{\pi}{180}$ (**C**) $\frac{\pi}{60}$ (**D**) $\frac{2\pi}{30}$ (**E**) $\frac{\pi}{30}$

9. Das Polynom $p(x) = x^5 + bx + c$ hat ganzzahlige Koeffizienten, es gilt $p(3) = 0$. Welche der folgenden ganzen Zahlen kann dann *nicht* gleich c sein?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 36 (**E**) 9

10. Ein Raumschiff fliegt von der Erde zu einem 2^{20} km entfernten Planeten. Nach einem Viertel der Strecke geht der Funkkontakt zur Erde verloren und kommt erst wieder in dem Moment zustande, als das Raumschiff 2^{19} km von der Erde entfernt ist. Wie viele Kilometer flog das Raumschiff ohne Funkkontakt?

(**A**) 2^8 (**B**) 2^9 (**C**) 2^{10} (**D**) 2^{18} (**E**) 2^{19}

4-Punkte-Aufgaben

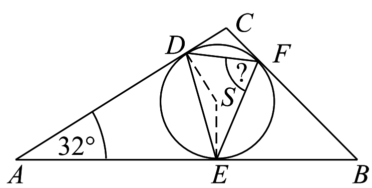
11. Welcher Rest entsteht bei der Divisionsaufgabe $(3^{20} \cdot 5^{30} - 2) : 15$?

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) 8 (**E**) 13

12. Fritz, die Schildkröte, ist zweieinhalb mal so schnell wie Wanda, die Schnecke. Bei einem 100-Meter-Rennen gehen sie gleichzeitig durchs Ziel. Wie groß war der Vorsprung, den Fritz Wanda zugestanden hatte?

(**A**) 25 m (**B**) 50 m (**C**) 60 m (**D**) 66 m (**E**) 80 m

13. In das Dreieck ABC sei der Inkreis mit dem Mittelpunkt S einbeschrieben, mit D, E und F seien die Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreieckseiten bezeichnet. Wenn $\angle CAB = 32°$ ist, dann misst $\angle EFD =$



(**A**) 82° (**B**) 74° (**C**) 64°
(**D**) 46° (**E**) keine eindeutige Lösung

14. Anna will sich für 54 DM einen Walkman kaufen. Als sie nach ihren Ersparnissen guckt, stellt sie fest: „Ich hab noch nicht genug gespart, aber wenn meine Ersparnisse um ein Fünftel größer wären, als sie sind, würde ich ein Viertel weniger brauchen, als ich jetzt brauche.“ Wie groß sind Annas Ersparnisse?

(**A**) 6 DM (**B**) 12 DM (**C**) 24 DM (**D**) 27 DM (**E**) 30 DM

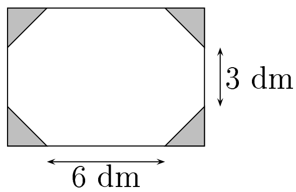
15. Es seien x, y und z die Ziffern der 3-stelligen Zahl xyz, wobei $x > z$. Bilden wir die Differenz $xyz - zyx$, so erhalten wir eine 3-stellige Zahl mit 4 als 1. Ziffer. Dann sind die 2. und 3. Ziffer

(**A**) 5 und 9 (**B**) 9 und 5 (**C**) 5 und 4
(**D**) 4 und 5 (**E**) nicht eindeutig bestimmt

16. Für welche natürliche Zahl n hat das regelmäßige n-Eck genau $6n$ Diagonalen?

(**A**) für $n = 12$ (**B**) für $n = 13$ (**C**) für $n = 15$ (**D**) für $n = 17$ (**E**) für $n = 18$

17. Durch Abschneiden von 4 kongruenten gleichschenkligen Dreiecken von einem rechteckigen Wegwerftischtuch erhalten wir das gewünschte, in der Abbildung dargestellte 8-eckige Tuch, das einen Flächeninhalt von 62 dm^2 hat. Wie viel wurde von der Rechteckdecke abgeschnitten?



(**A**) 8 dm^2 (**B**) 12 dm^2 (**C**) 14 dm^2
(**D**) 16 dm^2 (**E**) Das lässt sich aus den Angaben nicht ermitteln.

18. Wenn $2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^x$, dann ist

(**A**) $x = 997$ (**B**) $x = 779$ (**C**) $x = 499$ (**D**) $x = 449$ (**E**) $x = 399$

19. Ein neues Antibiotikum wird getestet. Man stellt folgendes Verhalten fest: Die Gabe der ersten Dosis stoppt die Vermehrung der Bakterien, während jede weitere, nach jeweils 8 Stunden erfolgende Gabe im Verlauf von 8 h (d. h. bis zur nächsten Gabe) 50% der vorhandenen Bakterien abtötet. Das bedeutet, dass bei einer Ausgangsmenge von 1 Million Bakterien die Anzahl nach 48 Stunden gleich ist

(**A**) 15625 (**B**) 125000 (**C**) 62500 (**D**) 31250 (**E**) 25000

20. Christine behauptet, dass man durch einen Würfel einen ebenen Schnitt so legen kann, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist. Robert behauptet, dass man einen Schnitt so legen kann, dass die Schnittfläche ein Rechteck ist, bei dem eine Seite halb so lang wie die andere ist. Wer hat Recht?

(**A**) Keiner von beiden hat Recht. (**B**) Nur Christine hat Recht.
(**C**) Nur Robert hat Recht. (**D**) Beide haben Recht.
(**E**) Das hängt von der Länge der Würfelkante ab.

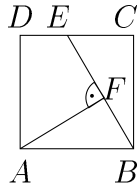
5-Punkte-Aufgaben

21. Im Sommercamp wollen 10 der Teilnehmer Volleyball spielen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten, 2 Mannschaften mit je 5 Spielern zu bilden, gibt es, wenn Thomas in derselben Mannschaft wie Karla, und Eva in einer anderen als Peter spielen möchte?

(**A**) 15 (**B**) 30 (**C**) 50 (**D**) 56 (**E**) 210

22. Wir betrachten einen Würfel mit der Kantenlänge 2 und eine Kugel mit dem Radius r, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Würfels zusammenfällt. Dann besteht die Menge aller Punkte, die sowohl der Würfeloberfläche als auch der Kugeloberfläche angehören, aus 6 Kreislinien genau dann, wenn gilt

(**A**) $1 < r \leq \sqrt{2}$ (**B**) $1 \leq r < \sqrt{2}$ (**C**) $r \leq \sqrt{2}$
(**D**) $1 < r < \sqrt{3}$ (**E**) $\sqrt{2} \leq r < \sqrt{3}$

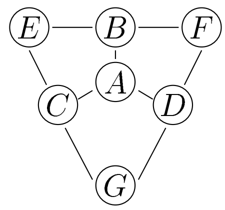


23. $ABCD$ sei ein Quadrat, die Länge von $\overline{AF}$ beträgt 4 cm, die von $\overline{FB}$ 3 cm. Wie lang ist $\overline{EC}$?

(**A**) 2,75 cm (**B**) 3,75 cm (**C**) 3,5 cm
(**D**) 3,25 cm (**E**) nicht bestimmbar

24. Auf wie viele verschiedene Weisen kann man die Zahl 447 als Summe (mindestens zweier) aufeinanderfolgender *ungerader* positiver Zahlen schreiben?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 8 (**E**) nicht lösbar



25. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 7 befinden sich unter den mit Buchstaben beschrifteten Feldern und zwar so, dass die Summe in jedem der drei Vierecke gleich 15 ist. Welche Zahl befindet sich im Feld A?

(**A**) 2 (**B**) 7 (**C**) 4
(**D**) 6 (**E**) Es gibt mehr als eine Möglichkeit.

26. Von einer Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass sie die folgenden Eigenschaften besitzt:
(1) $f(x)$ ist für alle nichtnegativen reellen Zahlen definiert.
(2) Für jede nichtnegative Zahl x gilt $f(x) \geq -2$.
(3) Die Zahl -2 aus (2) kann nicht durch eine größere ersetzt werden.
Die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat nur die Funktion

(**A**) $f(x) = |x-2|$ (**B**) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ (**C**) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x}$
(**D**) $f(x) = x^2 - x - 2$ (**E**) $f(x) = |x+2| - 2$

27. Wenn $x + y + z = 1$ ist und $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, dann ist $xy + yz + zx =$

(**A**) -2 (**B**) -1 (**C**) 0 (**D**) 1 (**E**) 2

28. Welche ist die Menge der möglichen Werte, die der Term $\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{a+b}{|a+b|}$ annehmen kann, wenn a und b beliebige, von null verschiedene reelle Zahlen mit $a + b \neq 0$ sind?

(**A**) $\{3, -1\}$ (**B**) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ (**C**) $\{-3,-1,1,3\}$
(**D**) $\{-2,0,2\}$ (**E**) $\{3,-1,1\}$

29. Wenn die reellen Zahlen x und y der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ genügen, dann ist der maximale Wert des Produktes xy gleich

(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{2}$ (**C**) 1 (**D**) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (**E**) $\dfrac{1}{2}$

30. Es seien A, B, C und D 4 Punkte, die nicht in einer Ebene liegen. Wie viele Ebenen gibt es, die zu den 4 Punkten gleiche Abstände haben?

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 7