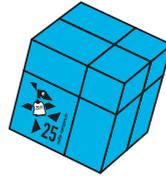


QWÜRFEL

Für die Teilnehmer des Känguru-Wettbewerbs 2019



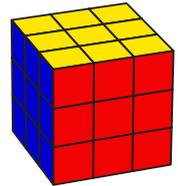
— Eine Anleitung —

Vielleicht hast du ganz vorsichtig gedreht, einmal, zweimal, . . . , aber auch gleich wieder zurück. Doch plötzlich – vielleicht eine Drehung vergessen – ist dein Qwürfel gar nicht wiederzuerkennen. Überall stehen kleine Teile hervor, und du bekommst den Ausgangszustand nicht mehr hin. Stimmt's?

Kein Problem! Mit dieser Anleitung bringst du den Qwürfel wieder in Ordnung.

Zuerst ein paar Worte zur Geschichte

Dein Qwürfel ist ein „kleiner Verwandter“ des Zauberwürfels, der in den 1980er Jahren weltweit für Aufregung sorgte. Dieser Zauberwürfel hat jedoch an jeder Kante 3 kleine Würfel und ist ungleich schwieriger zu richten als dein Qwürfel. Erfunden wurde er von dem ungarischen Architekturprofessor Ernő Rubik, der damit das räumliche Vorstellungsvermögen seiner Studierenden trainieren wollte. Der „Rubik-Würfel“ trat einen wahren Siegeszug um die Welt an. Überall wurde geknodelt. Ein richtiges Würfelfieber brach aus. Frag deine Eltern oder Großeltern, bestimmt können sie sich erinnern. Nach und nach wurden Lösungswege veröffentlicht. Ganze Bücher erschienen über den Zauberwürfel. Und natürlich reizte es viele Erfinder, ähnliche Körper zu entwickeln. Nach und nach kamen Tetraeder, Pentagon-Dodekaeder, Rhomben-Dodekaeder sowie $4 \times 4 \times 4$ -Würfel, $5 \times 5 \times 5$ -Würfel, . . . und sogar $11 \times 11 \times 11$ -Würfel auf den Markt.



Und jetzt gibt es den Qwürfel!

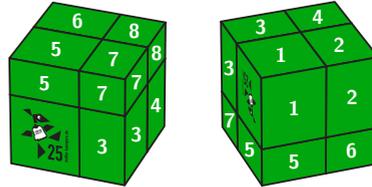
Der Qwürfel, den alle Teilnehmer als „Preis für alle“ beim Känguru-Mathematikwettbewerb 2019 bekommen haben, hat wieder eine Besonderheit: Der Qwürfel besteht nicht aus gleich großen *Würfeln*, sondern aus 8 unterschiedlich großen *Quadern* (daher auch der Name mit dem „Q“ vor dem „würfel“). Dass alle Quader dieselbe Farbe haben, macht es ziemlich kompliziert zu erkennen, mit welchem Quader nun gerade etwas angefangen werden sollte...

Bezeichnung der Quader

Zur Unterscheidung nummerieren wir die Quader von 1 bis 8:

Bezeichnung	Maße (in mm)
Q1	25 × 23 × 21
Q2	25 × 23 × 17
Q3	25 × 21 × 15
Q4	25 × 17 × 15
Q5	23 × 21 × 13,5
Q6	23 × 17 × 13,5
Q7	21 × 15 × 13,5
Q8	17 × 15 × 13,5

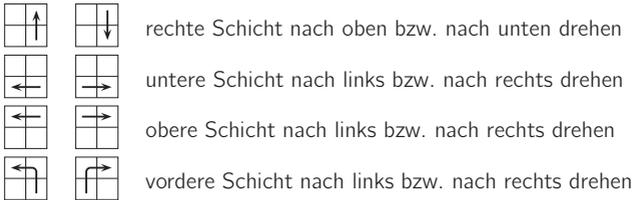
Die Nummerierung ist so vorgenommen, dass die Quader Q1 bis Q4 die „dickste“ Schicht des Qwürfels bilden und die Quader Q5 bis Q8 die „dünnste“.



In beiden Schichten sind die Quader der Größe nach nummeriert. Der größte Quader ist Q1; er trägt auf seiner größten Seitenfläche das Känguru-Logo. Von jedem Quader befinden sich genau drei Seitenflächen vollständig an der Oberfläche des Qwürfels, und zwar die drei farbigen. Die Maße von Länge, Breite und Höhe der einzelnen Quader sind bei jedem Quader voneinander verschieden, und daher sind bei jedem Quader die drei farbigen Seitenflächen unterschiedlich groß.

Bezeichnung der Drehungen

Im Qwürfel können wir 6 Schichten unterscheiden: die obere, die untere, die linke, die rechte, die vordere und die hintere Schicht. Die Drehungen der Schichten um jeweils 90° werden wie folgt dargestellt:



Schließlich bedeuten $\begin{matrix} \uparrow \\ \boxed{2} \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} \rightarrow \\ \boxed{2} \end{matrix}$, dass die entsprechende Drehung zweimal direkt nacheinander zu vollziehen ist.

- Halte bei der Drehung einer Schicht die andere Schicht mit einer Hand fest, damit sie während der Drehung ihre Lage nicht ändert.

Wenn du zum Beispiel die obere Schicht drehst, dann hältst du die untere Schicht fest; wenn du die vordere Schicht drehst, dann hältst du die hintere Schicht fest; usw.

Jetzt geht's los!

Wie ist der Qwürfel nun zu richten? Es gibt dafür verschiedene Möglichkeiten, je nachdem wie er verdreht ist. Wir geben *einen möglichen* Weg an, mit dem der Qwürfel Schritt für Schritt in seine Ausgangsform gebracht werden kann.



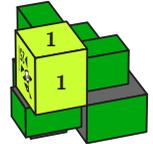
Die erste Schicht

Zuerst soll die dickste Schicht mit den Quadern Q1, Q2, Q3 und Q4 hergestellt werden. Vielleicht hast du das schon probiert und es sogar allein hinbekommen. Zur dicksten Schicht gehört Q1, der größte Quader, der mit seinem Känguru-Logo am leichtesten von den anderen zu unterscheiden ist.

Schritt 1

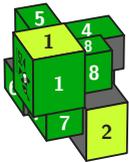
Nimm den Qwürfel so in die Hand, dass Q1, der größte Quader, vorn links oben ist und das Känguru-Logo nach links zeigt.

! Mit „vorn“ ist stets die Seite gemeint, auf die du blickst, wenn du den Qwürfel vor dir in den Händen hältst.



Wir wollen nun Q2, den zweitgrößten Quader, exakt passend neben Q1 bringen. Dazu drehen wir – ohne Q1 zu bewegen – eine oder mehrere Schichten so, dass Q2 in der vorderen Schicht nach rechts unten gelangt. Nun sind Q1 und Q2 beide in der vorderen Schicht. Die Seitenflächen von Q2 sind ja, wie wir festgestellt haben, voneinander verschieden. Also können wir erkennen, welche die kleinste ist. Und diese kleinste Seitenfläche kann jetzt nach vorn, nach rechts oder nach unten weisen. Für jeden dieser 3 Fälle zeigen die Bilder, wie Q2 an die richtige Position neben Q1 gedreht werden kann.

kleinste Seitenfläche von Q2 weist nach vorn



kleinste Seitenfläche von Q2 weist nach rechts

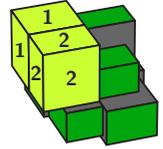


kleinste Seitenfläche von Q2 weist nach unten



Schritt 2

Auf dieselbe Weise, wie wir Q2 neben Q1 gebracht haben, bringen wir nun Q4 (den viertgrößten Quader) in die richtige Position neben Q2. Dazu halten wir den Qwürfel so in der Hand, dass Q2 vorn links oben und Q1 hinten links oben ist. Nach diesem Schritt befindet sich Q4 vorn rechts oben neben Q2. Nun sind drei der vier Quader der ersten Schicht in der richtigen Position.

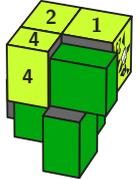


Schritt 3

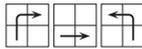
Es ist ein bisschen komplizierter, Q3 an die richtige Position zu bewegen. Dazu halten wir den Qwürfel so in der Hand, dass jetzt Q4 vorn links oben ist. Nun befördern wir Q3 nach vorn rechts unten (also unter den Platz, den er in der ersten Schicht einnehmen soll). Befindet sich Q3 bereits in der unteren Schicht, drehen wir die untere Schicht, bis Q3 vorn rechts unten ist. Befindet sich Q3 vorn rechts oben, ist aber nicht richtig ausgerichtet, so bringen wir Q3 durch

↓		
→		
↑		

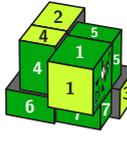
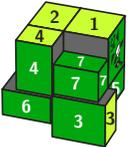
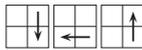
 nach vorn rechts unten. Nun befördern wir Q3 durch eine der folgenden 3 Bewegungen an die richtige Position, je nachdem, ob die kleinste Seite nach vorn, nach rechts oder nach unten weist.



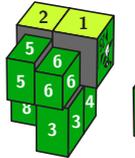
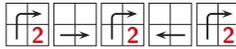
kleinste Seitenfläche
von Q3 weist nach vorn



kleinste Seitenfläche
von Q3 weist nach rechts



kleinste Seitenfläche
von Q3 weist nach unten



Damit ist die erste Schicht fertig!

Sieht doch schon ganz gut aus, dein Qwürfel, oder?



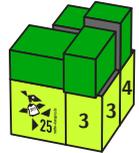
Die zweite Schicht

Nun ist die dünnste Schicht mit den Quadern Q5, Q6, Q7 und Q8 an der Reihe. Diese richten wir in zwei Schritten. Dabei werden jeweils 2 Quader gedreht oder miteinander vertauscht. Die anderen 6 Quader befinden sich am Ende wieder auf ihrem Ausgangsplatz, auch wenn der Qwürfel zwischenzeitlich ziemlich durcheinander aussieht.

Schritt 4

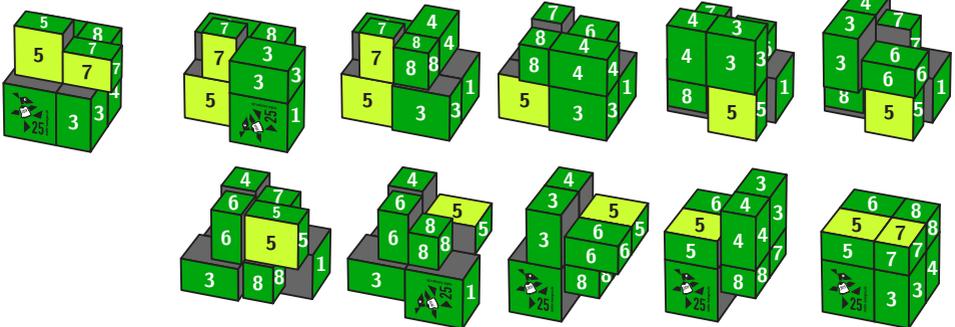
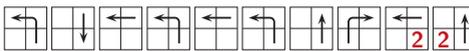
In diesem Schritt richten wir die Quader in der oberen Schicht so, dass alle mit ihrer größten Seitenfläche nach oben weisen, unabhängig davon, ob dann jeder Quader in seiner richtigen Position ist.

Nimm den Qwürfel so in die Hand, dass die fertige erste Schicht unten liegt und Q1 mit dem Känguru-Logo nach vorn weist. Wähle in der oberen Schicht einen Quader, dessen größte Seitenfläche nicht nach oben weist.



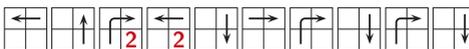
Wenn in der oberen Schicht genau ein Quader mit der größten Seitenfläche nach oben zeigt (so wie Q5 im Bild), dann wähle zuerst den Quader, der diesem diagonal gegenüber liegt.

Drehe die obere Schicht, dass die größte Seitenfläche des gewählten Quaders nach vorn weist, egal ob er sich dann auf der rechten oder linken Seite befindet. Mit der folgenden Bewegung werden die beiden Quader vorn oben, also der gewählte Quader und der daneben (im Beispiel Q5 und Q7), so gedreht, dass die Seitenflächen, die vor der Bewegung nach vorn wiesen, jetzt nach oben weisen.



Führe diesen Schritt so oft durch, bis alle Quader dieser Schicht mit ihrer größten Seitenfläche nach oben weisen (im ungünstigsten Fall insgesamt 4 Mal).

Tipp: Wenn zwei benachbarte Quader mit ihrer größten Seitenfläche „nach außen“, das heißt nach links und nach rechts, weisen (so wie Q5 und Q7 im Bild rechts), kannst du mit der folgenden Bewegung diese beiden Quader gleichzeitig mit ihrer größten Seitenfläche nach oben drehen und dir dadurch Schritt 4 verkürzen:



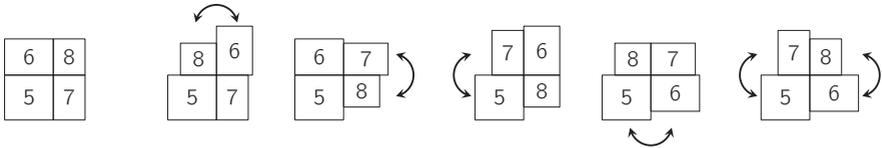
Schritt 5

In diesem Schritt vertauschen wir die Quader der oberen Schicht, bis alle an der richtigen Stelle sind.

Nimm den Qwürfel so in die Hand, dass die fertige erste Schicht nach unten weist und Q1 mit dem Känguru-Logo nach vorn.



Schau dir deinen Qwürfel von oben an. Für die Lage der vier Quader der oberen Schicht gibt es folgende sechs Möglichkeiten, wenn man Q5 immer vorn links platziert:

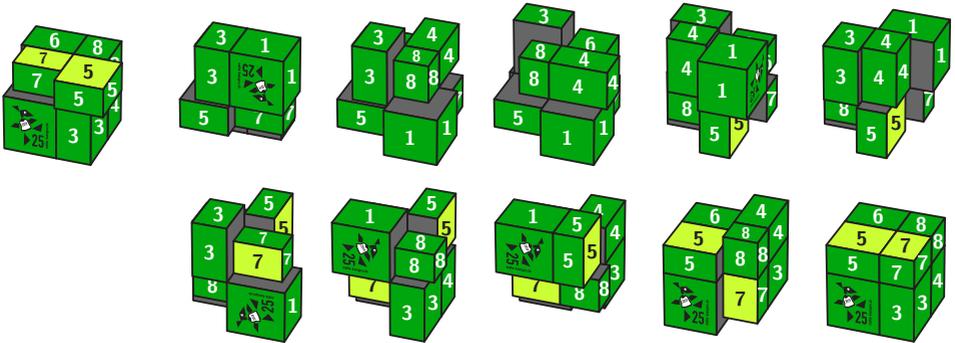


Im ersten Fall bist du bereits fertig. Im zweiten bis fünften Fall musst du nur noch zwei benachbarte Quader vertauschen, so wie angegeben. Im sechsten Fall sind es zwei Paare benachbarter Quader, die du vertauschen musst. Wenn du weißt, welcher Fall bei dir vorliegt, dann kann es losgehen.

Drehe die obere Schicht deines Qwürfels so, dass die beiden Quader, die zu vertauschen sind, oben vorn liegen. Abhängig davon, welcher der sechs Fälle vorliegt, sind das die Quader 6 und 8, 8 und 7, 7 und 5, 5 und 6 oder – im sechsten Fall – sowohl 7 und 5 als auch 6 und 8. Und los geht's:



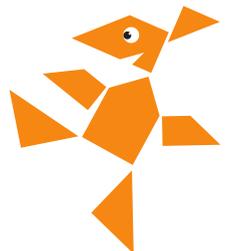
Hier ist ein Beispiel, in dem wie im vierten Fall die Quader 7 und 5 vertauscht werden:



Wenn du mit dem Tauschen fertig bist, drehe die obere Schicht wieder so, dass Q5 über Q1 liegt.



Geschafft!



Ein paar Worte zum Schluss

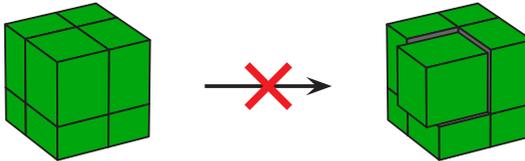
Du wirst dich vielleicht fragen, ob das alles sei, den Qwürfel immer nur nach den genannten Abläufen zu richten oder ob man sich nicht selbst etwas ausdenken könne, damit die Sache nicht langweilig wird.

Die Antwort lautet: Es gibt nicht nur eine Möglichkeit, im Gegenteil. Wem es Spaß macht, wer Ideen hat, wie sich der Weg verkürzen lässt, der sollte diesen Ideen nachgehen. Vielleicht findest du zusammen mit Freunden, mit Geschwistern oder deinen Eltern Möglichkeiten, geschickt den Ablauf zu optimieren. Der in unserer Beschreibung aufgezeigte Weg ist nur einer von sehr, sehr vielen. Einer, der in so einer Anleitung einigermaßen gut darstellbar ist. Auf keinen Fall ein besonders kurzer!

Warum kann nicht ein Quader allein gedreht werden?

Vielleicht hast du dich gewundert, dass beim Richten der Quader in Schritt 4 nicht ein Quader allein gedreht wurde, sondern immer zwei Quader gleichzeitig. Warum denn so kompliziert?

In diesem Abschnitt wollen wir beweisen, dass beim Qwürfel (wie auch beim $3 \times 3 \times 3$ -Zauberwürfel) nicht ein Quader allein gedreht werden kann. Es gibt also keine Abfolge von Drehungen, mit der zum Beispiel das Folgende erreicht werden kann (wobei alle anderen Quader unverändert bleiben):



Ein Beweis

Für den Beweis stellen wir uns zunächst vor, dass auf jeder der 4 Seitenflächen, die nach oben zeigen, und auf jeder der 4 Seitenflächen, die nach unten zeigen, ein Punkt klebt (so wie im Bild rechts angedeutet).

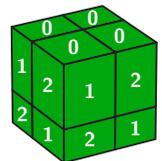
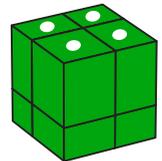
Jeder Quader besitzt also genau eine Seite mit einem Punkt.

Nun ordnen wir jedem Punkt einen Wert zu. Das geschieht abhängig davon, wo sich die Punkte genau befinden. Je nachdem, wie der Qwürfel verdreht ist, sind für die Punkte unterschiedliche Werte möglich (so wie rechts im Bild dargestellt):

Punkte auf der Ober- und Unterseite haben den Wert 0.

Punkte auf den Seitenflächen links oben oder rechts unten haben den Wert 1.

Punkte auf den Seitenflächen links unten oder rechts oben haben den Wert 2.



Jeder Konstellation ordnen wir nun ebenfalls eine Zahl zu: **die Summe der Werte der 8 Punkte.** Wenn der Qwürfel in seiner Ausgangsform ist, ist diese Summe 0. Aber natürlich sind auch andere Werte für diese Summe möglich.

Wir untersuchen nun, wie sich diese Summe ändert, wenn wir eine Schicht des Qwürfels drehen. Dabei gehen wir davon aus, dass sich der Qwürfel in einer beliebigen möglichen Konstellation befindet. Wir wissen also nicht, wo genau sich die Punkte befinden.

Fall 1

Was passiert, wenn die obere Schicht nach links gedreht wird?

Die Punkte auf den vier Quadern in der unteren Schicht bewegen sich nicht, ihre Werte bleiben daher unverändert. Alle Punkte, die auf der Oberseite sind, sind auch nach der Drehung auf der Oberseite. Alle Punkte auf den Seitenflächen gelangen auf eine andere Seitenfläche, aber dort an dieselbe Position.

Die Werte der Punkte ändern sich also nicht, sie bleiben entweder 0, 1 oder 2.

Das bedeutet: **In Fall 1 verändert sich die Summe der Werte der 8 Punkte nicht.**

Fall 2

Was passiert, wenn die vordere Schicht im Uhrzeigersinn gedreht wird?

Die Punkte auf den vier Quadern in der hinteren Schicht bewegen sich nicht.

Die Werte dieser Punkte ändern sich nicht.

Für den Punkt auf dem Quader vorn oben links gilt: Ist der Punkt oben (Wert 0), ist er nach der Drehung auf der rechten Seitenfläche oben links (Wert 1). Ist der Punkt vorn (Wert 1), ist er nach der Drehung auf der vorderen Seitenfläche oben rechts (Wert 2). Ist der Punkt links (Wert 2), ist er nach der Drehung oben (Wert 0). Dasselbe gilt für den Punkt auf dem Quader vorn unten rechts.

Die Werte dieser beiden Punkte werden entweder jeweils um 1 größer oder um 2 kleiner.

Für den Punkt auf dem Quader vorn oben rechts gilt: Ist der Punkt oben (Wert 0), ist er nach der Drehung auf der rechten Seitenfläche unten links (Wert 2). Ist der Punkt rechts (Wert 1), ist er nach der Drehung unten (Wert 0). Ist der Punkt vorn (Wert 2), ist er nach der Drehung auf der vorderen Seitenfläche unten rechts (Wert 1). Dasselbe gilt für den Punkt auf dem Quader vorn unten links.

Die Werte dieser beiden Punkte werden entweder jeweils um 2 größer oder um 1 kleiner.

Betrachten wir alle möglichen Kombinationen der Werte der Punkte in der vorderen Schicht, ergibt sich:

In Fall 2 kann die Summe der Werte der 8 Punkte um 6 größer werden, um 3 größer werden, unverändert bleiben, um 3 kleiner werden oder um 6 kleiner werden.

Da sich die Werte der Punkte nicht ändern, wenn wir den Qwürfel auf den Kopf stellen oder um seine senkrechte Achse drehen, erfassen diese zwei Fälle alle Möglichkeiten für das Drehen einer Schicht.

Schlussfolgerung

Wir haben gesehen, dass beim Drehen einer Schicht stets gilt:

Die Summe der Werte der Punkte ändert sich um ein Vielfaches von 3 oder bleibt unverändert.

Wäre es möglich, den Qwürfel schrittweise so zu verdrehen, dass schließlich nur ein Quader allein verdreht ist, dann müssten die Summen zu Beginn und am Ende dieser Bewegung gleich sein oder sich um ein Vielfaches von 3 unterscheiden. Ist nur ein Quader verdreht, ist die Summe der Werte der Punkte am Ende jedoch um 1 oder um 2 größer oder kleiner als zu Beginn.

Daher ist es nicht möglich, nur einen einzelnen Quader zu verdrehen.

q.e.d.