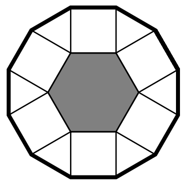
Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 17. März 2011 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzuaddiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. An das graue regelmäßige Sechseck mit Seitenlänge 1 werden nach außen abwechselnd Quadrate und gleichseitige Dreiecke gesetzt. Welchen Umfang hat die so entstehende Figur?

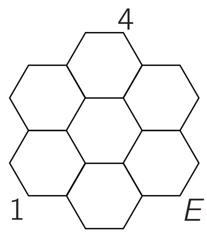


(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 18 (**E**) 21

2. Effi, Johanna und Caro starten zum Seifenkistenkurvenrennen. Zuerst führt Effi, gefolgt von Johanna und danach Caro. Bei der rasanten Fahrt um die Kurven tauschen Effi und Johanna insgesamt 5-mal die Reihenfolge. Mit Caro tauscht Effi die Reihenfolge nur 2-mal. Johanna und Caro tauschen die Reihenfolge 4-mal. Wie ist die Reihenfolge im Ziel?

(**A**) Caro vor Effi vor Johanna (**B**) Johanna vor Caro vor Effi (**C**) Effi vor Johanna vor Caro
(**D**) Caro vor Johanna vor Effi (**E**) Johanna vor Effi vor Caro

3. An alle Ecken der Sechsecke sollen Zahlen geschrieben werden, so dass die Summe der beiden Zahlen an jeder Sechseckseite stets dieselbe ist. Dann ist $E =$

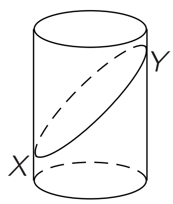


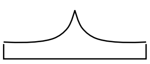
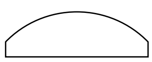
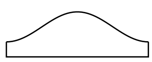
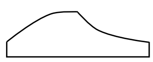
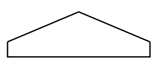
(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 24

4. Wie viele der ungeraden Zahlen, die größer 0 und kleiner als 54 sind, sind *nicht* durch 3 teilbar?

(**A**) 18 (**B**) 15 (**C**) 10 (**D**) 9 (**E**) 7

5. Ein Zylinder ist durch einen ebenen Schnitt, der durch die beiden Punkte X und Y auf dem Mantel verläuft, in zwei Teile geteilt worden. Wie könnte die abgewickelte Mantelfläche des unteren Zylinderteils aussehen?



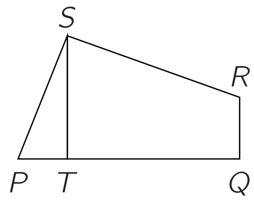
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

6. Ich stelle mir alle 4-stelligen Zahlen, deren Ziffernsumme 4 ist, der Größe nach aufgeschrieben vor. Mit der kleinsten wird begonnen. An welcher Stelle finden wir die 1102?

(**A**) an der 5. (**B**) an der 6. (**C**) an der 7. (**D**) an der 8. (**E**) an der 9.

7. Addiere ich die Längen von drei der vier Seiten eines Rechtecks, so kann ich als Ergebnis 20 oder 22 erhalten. Welchen Umfang hat das Rechteck?

(**A**) 24 (**B**) 25 (**C**) 26 (**D**) 28 (**E**) 32



8. Im Viereck $PQRS$ ist $\overline{PS} = \overline{SR}$, $\measuredangle PSR = \measuredangle RQP = 90°$ und $\overline{ST} = 5$. Die Strecke ST steht senkrecht auf PQ (*Skizze nicht maßstabgerecht*). Dann ist der Flächeninhalt von $PQRS$ gleich

(**A**) 20 (**B**) 22,5 (**C**) 25 (**D**) 27,5 (**E**) 30

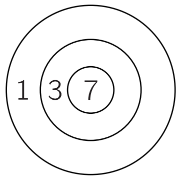
9. Wenn $2^x = 15$ und $15^y = 32$ ist, dann ist $x \cdot y =$

(**A**) 5 (**B**) $\log_2 47$ (**C**) 7 (**D**) $\sqrt{47}$ (**E**) $\log_2 15 + \log_{15} 32$

10. In $z = \star\star\star 5 \star 0$ steht jedes Sternchen für eine Ziffer. Es ist bekannt, dass z durch 27 teilbar ist und dass $\sqrt{z}$ eine natürliche Zahl ist. Dann ist $\sqrt{z} =$

(**A**) 580 (**B**) 290 (**C**) 370 (**D**) 420 (**E**) 450

4-Punkte-Aufgaben



11. Die Ringe auf einer Zielscheibe sind mit 1, 3 und 7 bewertet (s. Abb.). Ein Schuss, der danebengeht, ist 0 Punkte wert. Wie viele verschiedene Gesamtpunktzahlen sind als Ergebnis bei drei Schüssen möglich?

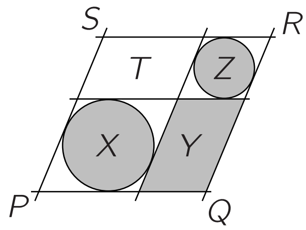
(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 17 (**D**) 19 (**E**) 22

12. Zu zwei Rechtecken mit den Maßen 7×11 bzw. 4×8 suche ich ein drittes Rechteck, so dass ich die drei Rechtecke zu einem großen Rechteck zusammenlegen kann. Welches der folgenden Maße kann das dritte Rechteck *nicht* haben?

(**A**) 1×11 (**B**) 3×4 (**C**) 3×8 (**D**) 7×8 (**E**) 4×7

13. Claire, unser Mathegenie, hat in diesem Jahr die Schultombola vorbereitet. Sie hat die Lose mit lauter verschiedenen natürlichen Zahlen beschriftet. Als ich sie frage, wie viele Lose es gibt, sagt sie, dass von den Zahlen, die sie auf die Lose geschrieben hat, genau 30 durch 6 teilbar seien, genau 20 durch 7 und genau 10 durch 42. Wie viele Lose sind demzufolge mindestens in der Tombola?

(**A**) 30 (**B**) 40 (**C**) 53 (**D**) 54 (**E**) 60



14. Drei Parallelen werden von drei anderen Parallelen so geschnitten, dass, wie im Bild, in zwei der entstehenden Parallelogramme Kreise einbeschrieben werden können. Die Flächeninhalte der grauen Flächen seien X, Y und Z, der des Parallelogramms $PQRS$ sei W, und der Flächeninhalt des weißen Parallelogramms sei T. Wenn ich aus den Werten X, Y, Z, W geeignet wählen kann, wie viele dieser Werte muss ich mindestens kennen, um T zu bestimmen?

(**A**) einer (**B**) zwei (**C**) drei (**D**) vier (**E**) weitere Angaben sind nötig

15. Micha will in die fünf leeren Felder des abgebildeten 3×3-Feldes ganze Zahlen derart hineinschreiben, dass in jedem 2×2-Teilquadrat die Summe der vier Zahlen 10 ist. Welche der folgenden Zahlen kann die Summe der zu ergänzenden fünf Zahlen sein?

	2	
1		3
	4	

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) keine dieser Zahlen

16. Ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat haben denselben Umfang. Dann verhält sich die Dreiecksfläche zur Quadratfläche wie

(**A**) $3 : 4$ (**B**) $1 : 2$ (**C**) $\sqrt{2} : 2$ (**D**) $2\sqrt{5} : 5$ (**E**) $4\sqrt{3} : 9$

17. Bei einer Umfrage unter den Teilnehmern an der Regionalrunde der Mathematik-Olympiade stellt sich heraus: genau 6 der 48 Teilnehmer haben nur ein Geschwisterkind, das auch bei der Regionalrunde mitmacht, 9 der Teilnehmer sind mit 2 Geschwistern dabei und 4 mit sogar 3 Geschwistern. Die restlichen Teilnehmer haben keine Geschwister, die an der Regionalrunde teilnehmen. Aus wie vielen verschiedenen Familien sind die Teilnehmer bei dieser Regionalrunde?

(**A**) 19 (**B**) 25 (**C**) 31 (**D**) 36 (**E**) 48

18. Auch bei der Fluggesellschaft X gibt es eine Grenze, bis zu der das Gepäck ohne Aufpreis mitbefördert wird. Bei Übergepäck ist ein fester Betrag pro kg zu entrichten. Ein Ehepaar, das zusammen 60 kg Gepäck aufgibt, hat 30 € für Übergepäck zu bezahlen. Ein Einzelreisender würde für 60 kg Gepäck 105,00 € bezahlen. Bis zu welcher Grenze erfolgt die Beförderung von Gepäck ohne Aufpreis?

(**A**) 15 kg (**B**) 16 kg (**C**) 18 kg (**D**) 20 kg (**E**) 25 kg

19. Ich betrachte die Menge aller 3-stelligen Zahlen, die als Ziffern nur 1, 2 oder 3 haben. Dann wähle ich aus dieser Menge eine Teilmenge so, dass je zwei Zahlen dieser Teilmenge mindestens eine Ziffer gemeinsam haben. Wie viele Zahlen kann eine solche Teilmenge *höchstens* enthalten?

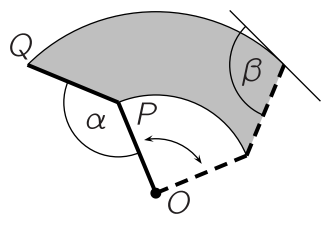
(**A**) 4 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 24 (**E**) 36

20. Die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FA}$ eines 6-Ecks sind sämtlich Tangenten desselben Kreises. Wenn $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CD} = 6$, $\overline{DE} = 7$ und $\overline{EF} = 8$ ist, wie lang ist dann $\overline{FA}$?

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 13

5-Punkte-Aufgaben

21. Ein Scheibenwischer ist so konstruiert, dass die Länge des Wischers $\overline{PQ}$ und die des Verbindungstabs zum Motor $\overline{PO}$ gleich sind und dass zwischen ihnen der feste Winkel α ist. Der Wischer führt eine Drehbewegung um O bis zum Anschlag aus. Dort entsteht zwischen der Tangente an die Kurve, die das Wischerblattende beschreibt, und dem Wischerblatt der Winkel β. Es ist $\beta =$



(**A**) $\dfrac{3\pi - \alpha}{2}$ (**B**) $\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ (**C**) $\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$ (**D**) $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ (**E**) $\pi + \dfrac{\alpha}{2}$

22. Gibt es eine natürliche Zahl a mit folgenden Eigenschaften: $a + 1$ ist durch 2 teilbar, $a + 2$ ist durch 3 teilbar, $a + 3$ ist durch 4 teilbar, $a + 4$ ist durch 5 teilbar, $a + 5$ ist *nicht* durch 6 teilbar?

(**A**) Nein, sie existiert nicht. (**B**) Ja, die kleinste ist 2-stellig. (**C**) Ja, die kleinste ist 4-stellig. (**D**) Ja, die kleinste ist 5-stellig. (**E**) Ja, die kleinste ist 7-stellig.

23. Unter den positiven ganzen Zahlen x, die kleiner als 100 sind, suchen wir alle diejenigen, für die $x^2 - 81$ durch 100 teilbar ist und summieren sie. Diese Summe ist gleich

(**A**) 100 (**B**) 91 (**C**) 200 (**D**) 181 (**E**) 81

24. Im rechts abgebildeten Bruch stehen in den Produkten in Zähler und Nenner verschiedene Buchstaben für verschiedene und gleiche Buchstaben für gleiche positive einstellige Zahlen. Welchen *kleinsten ganzzahligen* Wert kann der Bruch annehmen?

$$\frac{S \cdot I \cdot L \cdot I \cdot Z \cdot I \cdot U \cdot M}{Z \cdot I \cdot N \cdot K}$$

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 7

25. Wir betrachten die arithmetischen Folgen $\{1, 20, 39, 58, \ldots\}$ und $\{35, 61, 87, 113 \ldots\}$. Wie viele verschiedene arithmetische Folgen von positiven ganzen Zahlen gibt es, die diese beiden Folgen als Teilfolgen enthalten?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) vier (**E**) unendlich viele

26. Ria und Yves überlegen, ob sie baden gehen sollen. Ein Wurf mit einer noch zu bestimmenden Anzahl von Würfeln soll die Entscheidung bringen. Wird keine 6 gewürfelt, wird gebadet und Ria muss als Erste ins Wasser. Ist genau eine 6 dabei, wird ebenfalls gebadet und Yves muss als Erster rein. Wird mehr als eine 6 gewürfelt, wird nicht gebadet. Mit wie vielen Würfeln müssen Ria und Yves würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, als Erster ins Wasser zu müssen, für beide gleich ist?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 17

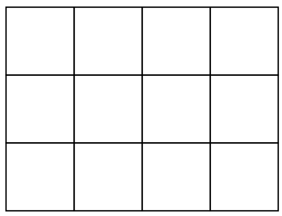
27. Es sei z die kleinstmögliche Zahl der Form $a \cdot b \cdot c$, wobei die Bedingung $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ erfüllt ist. Dabei sind a, b und c natürliche Zahlen. Wie viele Teiler hat z, wobei 1 und z als Teiler eingeschlossen sind?

(**A**) 30 (**B**) 49 (**C**) 60 (**D**) 77 (**E**) 103

28. Auf dem Wühltisch im Kaufhaus liegen am Abend rote und grüne Socken wild durcheinander. Als Spezialist in Sockenmathematik zähle ich sogleich alle Socken, und nach etwas Überlegen stellt sich heraus, dass die Wahrscheinlichkeit, beim zufälligen Greifen zweier Socken zwei gleichfarbige zu erwischen, gleich 1/2 ist. Welche der folgenden Aussagen ist dann *mit Sicherheit* richtig?

(**A**) Die Anzahl der Socken ist durch 4 teilbar. (**B**) Die Anzahl der Socken ist eine Primzahl.
(**C**) Es sind genauso viele rote wie grüne Socken. (**D**) Die Anzahl der Socken ist mindestens 10.
(**E**) Die Anzahl der Socken ist eine Quadratzahl.

29. Wir stellen uns vor, dass in ein 4×3-Kästchenpapier 12 voneinander verschiedene natürliche Zahlen geschrieben wurden. Dabei haben Zahlen in benachbarten Zellen, d. h. solchen, die eine gemeinsame Seite haben, einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Wir bezeichnen die größte dieser 12 Zahlen mit G. Wie groß muss G mindestens sein?



(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 21

30. Ein $3 \times 3 \times 3$-Würfel besteht aus 27 identischen kleinen Würfeln. Eine Ebene, die durch den Mittelpunkt des Würfels verläuft, schneidet den Würfel senkrecht zu einer der Raumdiagonalen des Würfels. Wie viele kleine Würfel schneidet diese Ebene?

(**A**) 13 (**B**) 16 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 25