

Klassenstufen 11 bis 13

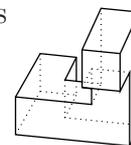
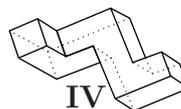
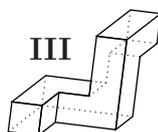
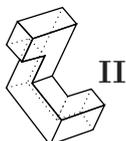
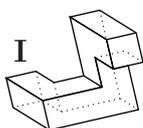
Donnerstag, 15. März 2007

Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden $3/4$, $4/4$ oder $5/4$ Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. Welcher oder welche der unten abgebildeten Körper sind aus dem rechts abgebildeten durch Drehung hervorgegangen?



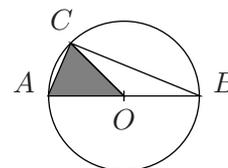
- (A) nur I und IV (B) nur I und III (C) nur IV
(D) nur I, II und III (E) nur I

2. Meine drei Brüder besitzen zusammen 57 „Herr der Ringe“-Sammelkarten. Beim Tausch gibt Matti 7 seiner Karten an Nico, Nico gibt 4 seiner Karten an Ole und Ole 6 der seinen an Matti. Nun hat jeder gleich viele. Wie viele Karten hatte Ole zu Beginn?

- (A) 13 (B) 17 (C) 18 (D) 21 (E) 23

3. Der Inhalt des Dreiecks AOC , wobei O Mittelpunkt des Kreises ist, beträgt $\sqrt{3}$. Dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) 2 (C) 5 (D) 4 (E) $4\sqrt{3}$

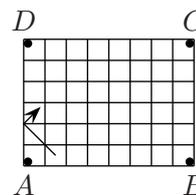


4. Just an dem Tage, als ihr Vater 20 Jahre alt wurde, erblickte Gisa das Licht der Welt. Neulich fragte sie ihn verschmitzt: Wie oft ist – seit meiner Geburt – mein Alter ein Teiler deines Alters, wenn wir beide ausreichend lang leben? Die richtige Antwort ist:

- (A) 4-mal (B) 5-mal (C) 6-mal (D) 7-mal (E) 8-mal

5. Eine Billardkugel trifft die erste Bande AD exakt unter einem Winkel von 45° . Der bärenstarke Bruno hat sie mit enormer Wucht in Bewegung gesetzt. In welches Loch wird sie fallen?

- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) In keines der Löcher



6. Wie viele Hamster müssen mindestens in einem Käfig sein, damit die folgende Aussage zutrifft: Es gibt mindestens zwei Männchen oder mindestens zwei Weibchen, die im selben Monat geboren wurden?

- (A) 13 (B) 16 (C) 25 (D) 32 (E) 48

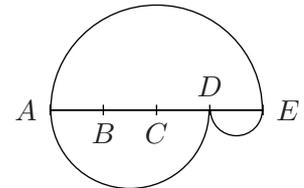
7. $\frac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ} =$

- (A) 0 (B) $\tan 1^\circ$ (C) $\cot 1^\circ$ (D) $\frac{1}{89}$ (E) 1

8. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern; keine Ziffer darf 0 sein. Welcher größte Wert kann mit der mehrfachen Subtraktion $2007 - KA - ENG - URU$ gebildet werden?

- (A) 1572 (B) 1863 (C) 1573 (D) 1865 (E) 1574

9. B , C und D zerlegen die Strecke AE in vier gleichlange Teilstrecken. AE , AD und DE sind Durchmesser von Halbkreisen. Entlang dieser Halbkreise gibt es zwei Wege von A nach E (s. Abb.). Das Verhältnis aus der Länge des oberen und der Länge des unteren Weges ist gleich



- (A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 2 : 1 (D) 3 : 2 (E) 1 : 1

10. Seit jeher züchtet die Frühlingsfee Schmetterlinge. Dies Jahr – so versichert sie ihrer Freundin – schlüpfen mindestens 80% der Schmetterlingspuppen. Bei dem Wetter! Es sind auch schon aus 10 der Puppen prächtige Falter geschlüpft. Als sie jedoch 5 vertrocknete Puppen findet, ist ihr klar, dass sie die 80% nur noch erreichen kann, wenn alle übrigen Puppen zu Schmetterlingen werden. Wie viele Schmetterlingspuppen hatte sie insgesamt?

- (A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

4-Punkte-Aufgaben

11. Welchen größten Wert kann der Quotient aus einer dreistelligen Zahl und der Summe ihrer Ziffern annehmen?

- (A) 99 (B) 100 (C) 109 (D) 110 (E) 111

12. Bei einer Bilanzrechnung zeigt sich: Der Ertrag β ist um 5% kleiner als der Ertrag γ und um 10% größer als der Ertrag α . Dann ist γ um x größer als α , und es ist x

- (A) ca. 50% (B) gleich 7,5% (C) ca. 2% (D) gleich 25% (E) knapp 16%

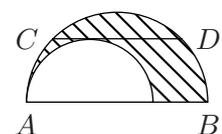
13. Gegeben ist die Gleichung $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, wobei x und y ganzzahlig sind. Dann ist x gleich

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) -1

14. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge 1. Welches ist die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate, die mit $ABCD$ genau 2 Eckpunkte gemeinsam haben?

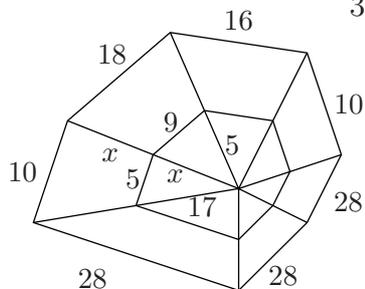
- (A) 14 (B) 12 (C) 6 (D) 17 (E) 10

15. Das schraffierte Gebiet wird durch zwei Halbkreise begrenzt (s. Abb.). Die Sehne CD ist parallel zum Durchmesser AB des größeren Halbkreises, berührt den kleineren Halbkreis und hat die Länge 4. Dann ist der Inhalt des schraffierten Gebiets



- (A) π (B) $1,5\pi$ (C) 2π (D) 3π (E) $2,5\pi$

16. Eine mathematisch besonders begabte Spinne webt ein Netz mit Netzstücken ganzzahliger Länge (s. Abb.). Auch die Länge x ist eine ganze Zahl. Wie lang ist x ? (Abb. ist nicht maßstabsgerecht.)



- (A) 5 (B) 9 (C) 13 (D) 14 (E) 16

17. Der Wert der Summe $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$ ist gleich

- (A) 1 (B) π (C) 0 (D) -1 (E) 10

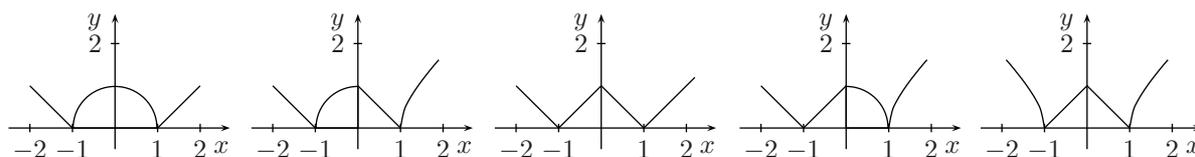
18. Eine ferne Insel wird von lügnerischen Lumpen (LL), die stets die Unwahrheit, und wahrheitsliebenden Weisen (wW), die stets die Wahrheit sprechen, bewohnt. Ein junger Mathematiker, dem dieses Phänomen wohlbekannt ist, strandet auf der Insel, und sein Blick fällt auf zwei am Strand weilende Schöne, eine groß, die andere klein. An näherer Bekanntschaft interessiert, fragt er die Kleine, die sein Herz am meisten bewegt, zu welcher der Gruppen sie gehört, worauf sie ihm antwortet: „Mindestens eine von uns beiden gehört zu den lügnerischen Lumpen.“ Welcher der folgenden Sätze ist dann wahr?

- (A) Die Kleine kann diesen Satz nicht aussprechen, weil sie sonst weder zu den LL noch zu den wW gehören würde.
 (B) Beide sind LL.
 (C) Beide sind wW.
 (D) Die Kleine gehört zu den LL, die Große zu den wW.
 (E) Die Große gehört zu den LL, die Kleine zu den wW.

19. Wie viele ganzzahlige Tripel $(x; y; z)$ sind Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$?
 Anmerkung: Den Lösungen entsprechen im kartesischen Koordinatensystem Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 3.

- (A) 30 (B) 24 (C) 12 (D) 6 (E) 3

20. Welcher Graph gehört zur Funktion $y = \sqrt{|(1+x)(1-|x|)|}$?



- (A) (B) (C) (D) (E)

5-Punkte-Aufgaben

21. Welche der folgenden Zahlen lässt sich *nicht* in der Form $x + \sqrt{x}$ schreiben, wobei x eine ganze Zahl bezeichnet?

- (A) 870 (B) 110 (C) 90 (D) 60 (E) 30

22. Es gilt: $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$. Wenn $f(g(x)) = x$ gelten soll, dann ist $g(x)$ gleich

- (A) $\frac{4x}{2-3x}$ (B) $\frac{3x}{2x+4}$ (C) $\frac{2x+4}{4x}$ (D) $\frac{3x+4}{2x}$ (E) $\frac{3x}{2x-4}$

23. Ann, Belinda und Charles werfen nacheinander einen Würfel. Ann gewinnt, wenn sie eine 1, 2 oder 3 wirft. Belinda gewinnt, wenn sie eine 4 oder eine 5 wirft. Charles gewinnt, wenn er eine 6 wirft. Ann beginnt und gibt den Würfel an Belinda, diese gibt ihn an Charles, Charles gibt ihn an Ann usw., solange, bis jemand zum ersten Mal gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der offenbar benachteiligte Charles gewinnt?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{23}$ (C) $\frac{1}{11}$ (D) $\frac{3}{38}$ (E) $\frac{1}{13}$

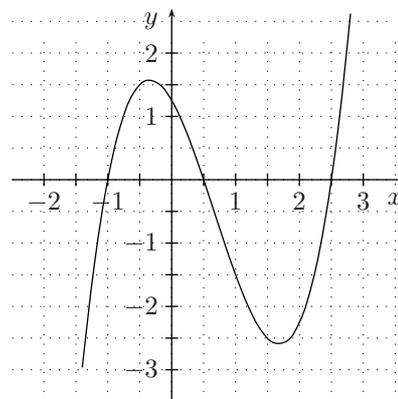
24. Wie groß ist der spitze Winkel eines Rhombus (auch Raute genannt), dessen Seite gleich dem geometrischen Mittel seiner Diagonalen ist?

Hinweis: Das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen a und b ist $\sqrt{a \cdot b}$.

- (A) 15° (B) $22,5^\circ$ (C) 30° (D) $37,5^\circ$ (E) 45°

25. Die Figur zeigt einen Ausschnitt des Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Dann gilt: $b \approx$

- (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) $0,5$ (E) $2,5$



26. Bestimme die Anzahl der verschiedenen Werte für a so, dass die quadratische Gleichung $x^2 + ax + 2007 = 0$ zwei ganzzahlige Lösungen für x hat.

- (A) 3 (B) 4 (C) 8 (D) 6 (E) 0

27. Teilen wir eine dreistellige Zahl durch die Summe ihrer Ziffern (Quersumme), so entsteht bei dieser Division in der Regel ein Rest. Wie groß ist der größtmögliche Rest?

- (A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 25 (E) 26

28. Nach ihrem anstrengenden Lauf-Training ziehen die 5 Sportler ihre Trikots aus, werfen sie auf einen Haufen und stürzen unter die Dusche. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass bei zufälligem Aufteilen der Trikots keiner der 5 sein eigenes zurück erhält?

- (A) 16 (B) 44 (C) 57 (D) 64 (E) 125

29. $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} =$

- (A) $\frac{9}{10}$ (B) $\frac{99}{100}$ (C) $\frac{999}{1000}$ (D) 9 (E) 1

30. Die wachsende Zahlenfolge 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... ($= 3^0, 3^1, 3^0 + 3^1, 3^2, 3^0 + 3^2, 3^1 + 3^2, 3^0 + 3^1 + 3^2, \dots$) besteht aus den Potenzen der Zahl 3 sowie aus allen möglichen Summen verschiedener solcher Potenzen. Dann ist die hundertste Zahl der Folge gleich

- (A) 1008 (B) 977 (C) 729 (D) 981 (E) 3^9