Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 16. März 2006 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

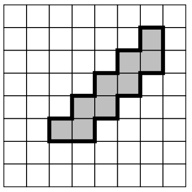
1. Auf wie viele Nullen endet das Produkt der ersten 2006 Primzahlen?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 4 (**D**) 9 (**E**) 26

2. Welches der folgenden Produkte ist am größten?

(**A**) $2006 \cdot 2006$ (**B**) $2005 \cdot 2007$ (**C**) $2004 \cdot 2008$ (**D**) $2003 \cdot 2009$ (**E**) $2002 \cdot 2010$

3. Mit je 1 m langen Zaunfeldern ist ein Gehege umzäunt (s. Abb.). Diese Zaunfelder sind so umzusetzen, dass ein geschlossenes Gehege mit möglichst großem Flächeninhalt entsteht. Die Seiten sollen wie bei dem abgebildeten Gehege waagerecht oder senkrecht verlaufen. Wie viel Quadratmeter beträgt der Flächeninhalt des neuen Geheges maximal?



(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 16 (**D**) 25 (**E**) 32

4. Bei Fernzügen wird oft im Infodisplay die Geschwindigkeit angezeigt. Als mein Freund und ich neulich auf derselben Strecke in verschiedene Richtungen fuhren, hatten wir vereinbart, uns bei der Begegnung unserer Züge die Augenblicksgeschwindigkeiten per Handy mitzuteilen, es waren 72 km/h bzw. 90 km/h. Mein Freund stoppte sogar noch mit seiner neuen Uhr die Zeit, die es brauchte, bis sein Zug an meinem vorbeigefahren war: genau 3 sec. Wie lang war der Zug, in dem ich fuhr?

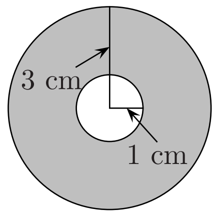
(**A**) 90 m (**B**) $0,135$ km (**C**) $0,162$ km (**D**) 72 m (**E**) $1,216$ km

5. In einer Versuchsreihe mit den Messwerten m_1, m_2, m_3, m_4 und m_5 bemerkt Anna, dass die Differenz zwischen den aufeinander folgenden Werten stets dieselbe ist. Nachher kann sie sich aber nur noch an die Werte $m_2 = 5,5$ und $m_5 = 10$ erinnern. Daraus kann sie gleichwohl den gesuchten Messwert m_1 noch berechnen; es ist $m_1 =$

(**A**) $0,5$ (**B**) 2 (**C**) $2,5$ (**D**) 4 (**E**) $4,5$

6. Wenn $4^x = 9$ und $9^y = 256$ ist, dann ist $xy =$

(**A**) 2006 (**B**) 48 (**C**) 36 (**D**) 10 (**E**) 4



7. Tom bastelt für die Kette seiner Schwester zwei Anhänger aus Ton. Er halbiert das Rohmaterial und formt aus der einen Hälfte einen Kreisring mit dem inneren Radius 1 cm und dem äußeren Radius 3 cm (s. Abb.). Die andere Hälfte des Tons formt er zu einer Kreisscheibe, die genau dieselbe Dicke wie der Kreisring hat. Der Radius dieser Kreisscheibe ist

(**A**) $2\sqrt{2}$ cm (**B**) $3\sqrt{3}$ cm (**C**) $2\sqrt{5}$ cm (**D**) 3 cm (**E**) 1, 5 cm

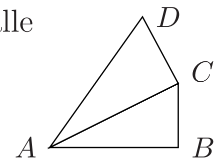
8. Aus den 9 Ziffern 1, 2,..., 9 lassen sich $9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9$ verschiedene 9-stellige Zahlen bilden, die lauter verschiedene Ziffern aufweisen. Wir stellen uns vor, jede dieser Zahlen wäre auf ein Extrakärtchen geschrieben und alle Kärtchen wären in eine Kiste gelegt worden. Wie viele davon muss ich (ohne draufzuschauen) mindestens der Kiste entnehmen, um sicher zu sein, dass sich zwei darunter befinden, die mit derselben Ziffer beginnen?

(**A**) $9! - 10$ (**B**) $8!$ (**C**) 2^9 (**D**) 10 (**E**) $10 \cdot 9$

9. Auf dem Tisch liegen die rechts abgebildeten 4 Kärtchen, auf denen je auf der einen Seite ein Buchstabe, auf der anderen eine Zahl steht. Elli vermutet, dass bei Kärtchen, die auf einer Seite einen Vokal aufweisen, auf der anderen Seite eine gerade Zahl steht. Wie viele der 4 Kärtchen muss sie mindestens umdrehen, um sich davon zu überzeugen, dass sie Recht hat?

$\boxed{\text{E}}$
$\boxed{\text{K}}$
$\boxed{4}$
$\boxed{7}$

(**A**) keines (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) alle



10. In der rechts abgebildeten Figur ist $\overline{AB} = 1$, $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD = 90°$ und $\measuredangle CAB = \measuredangle DAC = \theta$. Wie lang ist $\overline{AD}$?

(**A**) $\cos\theta + \tan\theta$ (**B**) $\dfrac{1}{\cos 2\theta}$ (**C**) $\cos^2\theta$ (**D**) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ (**E**) $\cos 2\theta$

4-Punkte-Aufgaben

11. Für welche der folgenden Funktionen ist der zugehörige Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse?

(**A**) $y = x^2 + x$ (**B**) $y = x^2 \cdot \sin x$ (**C**) $y = x \cdot \cos x$ (**D**) $y = x^3$ (**E**) $x \cdot \sin x$

12. Bei einem Roulette-Rad sind die 37 Löcher mit den Nummern 0, 1, 2, 3, ..., 36 markiert. Vorausgesetzt, es handelt sich um ein faires Rad, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Roulette-Kugel in einem Loch landet, dessen Nummer eine Primzahl ist?

(**A**) $\dfrac{5}{18}$ (**B**) $\dfrac{11}{37}$ (**C**) $\dfrac{11}{36}$ (**D**) $\dfrac{12}{37}$ (**E**) $\dfrac{1}{3}$

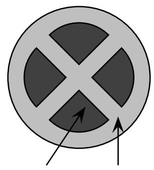
13. Teilt Silja die Zahl 1001 durch eine einstellige natürliche Zahl, so erhält sie 5 als Rest. Welchen Rest erhält sie, wenn sie 2006 durch dieselbe einstellige Zahl teilt?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

14. Die Zahl $-10^{(10^{-5})}$ ist

(**A**) eine sehr große Zahl (**B**) eine Zahl nahe 1 (**C**) eine Zahl nahe -1
(**D**) eine negative Zahl nahe 0 (**E**) eine sehr große negative Zahl

15. Als Ruth sich bei Rot an der Ampel ausruht, fällt ihr Blick auf ein Halteverbotsschild. „He," denkt sie, „das könnte einen Durchmesser von 40 cm haben, die blauen Teile könnten Viertelkreise und ihre Gesamtfläche ebenso groß wie der rote Teil des Schildes sein. Wenn das so ist, wie groß wäre dann der Radius des beim Zusammenlegen der Viertelkreise entstehenden Kreises?"

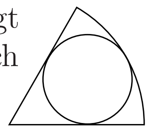


(**A**) $10\sqrt{2}$ cm (**B**) $8\sqrt{5}$ cm (**C**) $\frac{40}{3}$ cm (**D**) 24,5 cm (**E**) 20 cm

16. Gegeben sind drei Primzahlen a, b und c, für die $a > b > c$ gilt. Wenn $a+b+c = 102$ und $a-b-c = 16$, dann ist $a \cdot b \cdot c =$

(**A**) 4762 (**B**) 591 (**C**) 1026 (**D**) 4838 (**E**) 2006

17. Das Verhältnis der Radien des Sektors und des Inkreises in der Figur beträgt 3 : 1. Dann ist das Verhältnis der Flächeninhalte von Sektor und Inkreis gleich



(**A**) 5 : 4 (**B**) 4 : 3 (**C**) 3 : 2 (**D**) 5 : 3 (**E**) 6 : 5

18. Im Schulchor waren letztes Jahr 20 Sänger mehr aus der Oberstufe als aus den unteren Klassen. Dieses Jahr haben wir 10 % mehr Chormitglieder als im vergangenen Jahr. Dabei hat sich die Anzahl der Sänger aus den unteren Klassen um 20 %, die aus der Oberstufe um 5 % erhöht. Die Anzahl der Mitglieder des Schulchors beträgt dieses Jahr

(**A**) 89 (**B**) 66 (**C**) 54 (**D**) 72 (**E**) 59

19. Abb. 1 zeigt ein 4×4-Quadrat mit 8 weißen und 8 schwarzen Feldern. In einer Zugfolge soll dieses Quadrat in eines mit Schachbrettmuster (Abb. 2) überführt werden. Ein zulässiger Zug besteht darin, die Färbung zweier Felder zu vertauschen, die entweder in derselben Zeile oder in derselben Spalte liegen. Mit welcher kleinsten Anzahl von Zügen lässt sich die Ausgangsanordnung (Abb. 1) in das Schachbrettmuster überführen?

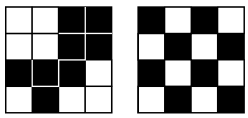
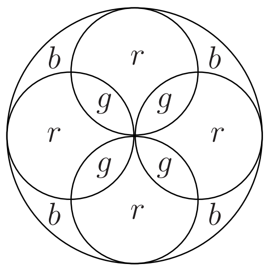


Abb. 1 Abb. 2

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) ist nicht möglich

20. Die Figur zeigt ein Kirchenfenster aus verschiedenfarbigem Glas. Bereiche mit dem Buchstaben r bestehen aus rotem, solche mit g aus grünem und solche mit b aus blauem Glas. Der Flächeninhalt aller grünen Bereiche beträgt 400 cm^2. Wie viel Quadratzentimeter beträgt der Inhalt aller blauen Bereiche?



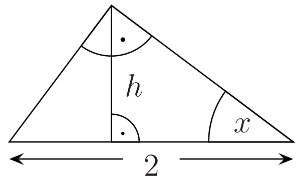
(**A**) 396 (**B**) 120π (**C**) $90\sqrt{2}\pi$ (**D**) 382 (**E**) 400

5-Punkte-Aufgaben

21. Es ist $\sqrt{1 + 2006\sqrt{1 + 2005\sqrt{1 + 2004\sqrt{1 + 2003 \cdot 2001}}}} =$

(**A**) 2003 (**B**) 2004 (**C**) 2005 (**D**) 2006 (**E**) 2007

22. Welcher der folgenden Terme ist gleich der Höhe h im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck?

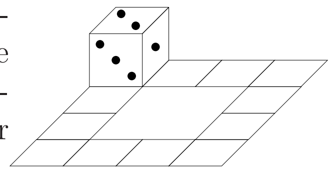


(**A**) $\cos^2 x$ (**B**) $\sin^2 x$ (**C**) $2\sin x$ (**D**) $\cos 2x$ (**E**) $2\sin x \cos x$

23. Es seien a und b reelle Zahlen, beide größer als 1. Welcher Bruch ist der größte?

(**A**) $\dfrac{a}{b-1}$ (**B**) $\dfrac{a}{b+1}$ (**C**) $\dfrac{2a}{2b+1}$ (**D**) $\dfrac{2a}{2b-1}$ (**E**) $\dfrac{3a}{3b+1}$

24. Ein Würfel befindet sich in der abgebildeten Position auf einem Streifen, der aus 12 Quadraten in der Größe einer Würfelseite besteht. Wie viele Runden muss er auf diesem Streifen gerollt werden, bis er wieder am Startfeld anlangt und alle seine Seiten in der Ausgangsposition sind?



(**A**) einmal (**B**) zweimal (**C**) dreimal (**D**) viermal (**E**) es ist unmöglich

25. Für wie viele Werte von b hat die quadratische Gleichung $x^2 - bx + 80 = 0$ zwei verschiedene positive gerade Zahlen als Lösungen?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) unendlich viele

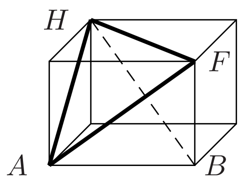
26. Für die Färbung der sechs Seitenflächen eines Würfels stehen sechs Farben zur Verfügung, keine zwei Seiten sollen dieselbe Farbe erhalten. Wie viele durch ihre Färbung verschiedene Würfel können dabei entstehen? (*Zwei Würfel sind verschieden, wenn sie nicht durch eine geeignete Drehung in Übereinstimmung gebracht werden können.*)

(**A**) 30 (**B**) 32 (**C**) 35 (**D**) 36 (**E**) 42

27. Wie viele nichtleere Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ haben die Eigenschaft, dass die Summe aus dem größten und dem kleinsten Element gleich 13 ist?

(**A**) 1024 (**B**) 1365 (**C**) 1175 (**D**) 4095 (**E**) 1785

28. Das Dreieck AFH habe die Seitenlängen 8 cm, 9 cm und $\sqrt{55}$ cm. Dann beträgt die Länge der Körperdiagonale $\overline{HB}$ des Quaders

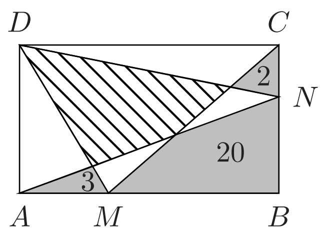


(**A**) $\sqrt{90}$ cm (**B**) 10 cm (**C**) $\sqrt{120}$ cm (**D**) 17,5 cm (**E**) 12 cm

29. Vera übt mit ihrem kleinen Bruder rechnen; er addiert 10 aufeinander folgende Zahlen und erhält das Ergebnis 2006. Vera merkt aber, dass er nur 9 der Zahlen addiert hatte. Welche Zahl hatte er vergessen?

(**A**) 209 (**B**) 218 (**C**) 219 (**D**) 229 (**E**) 230

30. Es sei $ABCD$ ein Rechteck, auf dessen Seiten AB bzw. BC die Punkte M bzw. N derart liegen, dass die Flächeninhalte der grauen Flächenstücke gerade 2, 3 bzw. 20 betragen. Dann ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche gleich



(**A**) 15 (**B**) 20 (**C**) 22,5 (**D**) 25 (**E**) zu wenig Information