Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 18. März 2004 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. Wenn k Kängurukaugummis p Euro und p Pandapralinen k Euro kosten, dann ist der durchschnittliche Preis für eine der Delikatessen (in Euro)

(**A**) 1 (**B**) $\frac{k+p}{2}$ (**C**) $\frac{2kp}{k+p}$ (**D**) kp (**E**) $\frac{k^2+p^2}{2kp}$

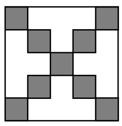
2. Eine Pyramide hat 17 Flächen. Wie viele Kanten hat sie?

(**A**) 16 (**B**) 17 (**C**) 18 (**D**) 30 (**E**) 32

3. Gina wartet auf ihren Freund Fred und vertreibt sich die Zeit mit Rechenübungen. Sie multipliziert die ersten 20 natürlichen Zahlen $1 \cdot 2 \cdots 20$, und als sie dann immer noch allein ist, teilt sie das Produkt durch 2 und wieder durch 2 und wieder.... Erst als das Ergebnis nicht mehr durch 2 teilbar ist, erscheint Fred. Wie oft hat Gina $1 \cdot 2 \cdots 20$ durch 2 geteilt?

(**A**) einmal (**B**) 6mal (**C**) 12mal (**D**) 18mal (**E**) 24mal

4. Es sei s eine ungerade natürliche Zahl. In einem Quadrat der Seitenlänge s sind entlang den Diagonalen (wie in der Abbildung für ein Quadrat mit Seitenlänge 5 dargestellt) kleine 1×1-Quadrate gefärbt, die Restfläche ist weiß. Der Flächeninhalt der weißen Fläche beträgt



(**A**) $(s-1)^2$ (**B**) $(s-1)^2 - 2s$ (**C**) $2(s-1)^2 + 1$ (**D**) $(s-1)^2 + 2$ (**E**) $(s-2)^2$

5. Die kleinste reelle Zahl x, die die Ungleichung $x^2 - 2004 \leq 0$ erfüllt, ist

(**A**) -2004 (**B**) 2004 (**C**) 0 (**D**) $\sqrt{2004}$ (**E**) $-\sqrt{2004}$

6. Wie viele rechtwinklige Dreiecke können gebildet werden, wenn ihre Ecken gleichzeitig Eckpunkte eines gegebenen regelmäßigen 6-Ecks sind?

(**A**) 6 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 18

7. Auf einer Wiese stehen 15 Schafe und ein paar Schäfer. Nachdem die Hälfte der Schäfer und ein Drittel der Schafe ins Dorf zurückgekehrt sind, lassen sich 50 Beine zählen. Wie viele Beine waren es, als noch alle auf der Wiese waren?

(**A**) 60 (**B**) 72 (**C**) 80 (**D**) 90 (**E**) 102

8. Ein Quadrat Q möge aus 18 kleineren Quadraten mit ganzzahliger Seitenlänge bestehen; 17 von ihnen haben die Seitenlänge 1. Dann ist der Flächeninhalt von Q

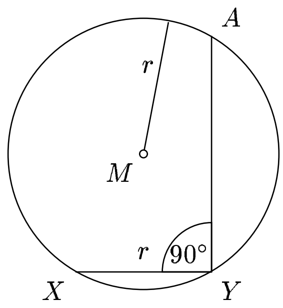
(**A**) 64 (**B**) 81 (**C**) 100 (**D**) 289 (**E**) 324

9. Für wie viele positive ganze Zahlen n ist $\dfrac{16\,(n+1)}{n-1}$ eine ganze Zahl?

(**A**) nie (**B**) 1 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 16

10. Wie groß ist $\sphericalangle XAY$?

(**A**) $22,5°$ (**B**) $30°$ (**C**) $37,5°$ (**D**) $42,5°$ (**E**) $45°$

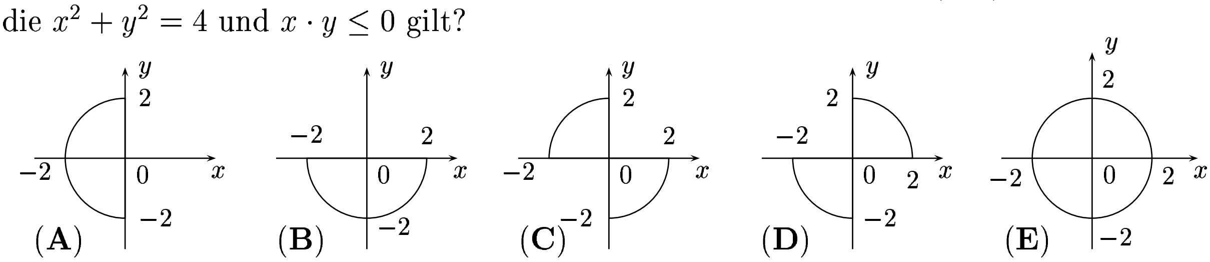


4-Punkte-Aufgaben

11. In einem undurchsichtigen Umschlag sind 100 Kärtchen, jedes mit einer der Zahlen von 1 bis 100 beschrieben, dabei steht auf keinen zwei Kärtchen dieselbe Zahl. Wie viele Kärtchen müssen mindestens aus dem Umschlag herausgenommen werden, um sicher zu sein, dass das Produkt, das wir aus den Zahlen auf den entnommenen Kärtchen bilden können, durch 4 teilbar ist?

(**A**) 25 (**B**) 50 (**C**) 52 (**D**) 64 (**E**) 75

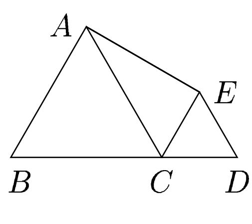
12. Welches ist die graphische Darstellung der Menge aller Punkte (x, y) der Ebene, für die $x^2 + y^2 = 4$ und $x \cdot y \leq 0$ gilt?



13. Die Zahl $\left(\sqrt{22+12\sqrt{2}} - \sqrt{22-12\sqrt{2}}\right)^2$ ist

(**A**) negativ (**B**) $= 0$ (**C**) > 0 und durch 5 teilbar
(**D**) $= 11\sqrt{2}$ (**E**) vierte Potenz einer von 0 verschiedenen Zahl

14. Die beiden in der Figur auftretenden gleichseitigen Dreiecke ABC und CDE haben die Seitenlängen 2 bzw. 1. Dann ist der Flächeninhalt des Vierecks $ABCE$ gleich

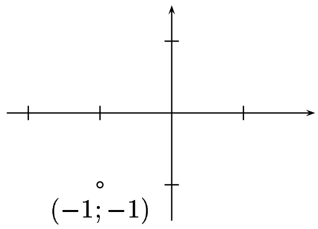


(**A**) 3 (**B**) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ (**C**) $\dfrac{6+\sqrt{3}}{4}$ (**D**) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (**E**) $\dfrac{4+5\sqrt{3}}{4}$

15. Wie viele positive ganze Zahlen lassen sich in der Form $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + a_4 \cdot 3^4$ darstellen, wobei a_0, a_1, a_2, a_3 und a_4 nur die Werte 1, 0 und -1 annehmen dürfen?

(**A**) 5 (**B**) 80 (**C**) 81 (**D**) 121 (**E**) 243

16. Wie viele Quadrate mit einem Eckpunkt in $A(-1;-1)$ gibt es, bei denen mindestens eine Koordinatenachse Symmetrieachse dieses Quadrats ist?

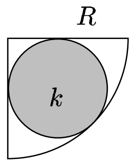


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

17. Wie viele Ecken hat ein Polygon, bei dem die Innenwinkelsumme gleich einem Siebentel der Innenwinkelsumme eines regulären 16-Ecks ist?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 7 (**D**) 9 (**E**) 14

18. Einem Viertelkreis mit dem Radius R sei ein Kreis k einbeschrieben (s. Abb.). Wie groß ist der Radius von k?



(**A**) $\dfrac{R-\sqrt{2}}{2}$ (**B**) $\dfrac{R\sqrt{2}}{4}$ (**C**) $\dfrac{5R}{2}$ (**D**) $\dfrac{R}{2}$ (**E**) $R\left(\sqrt{2}-1\right)$

19. Für eine geometrische Folge, das ist eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, in der für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Quotienten $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ je zweier aufeinander folgender Elemente gleich sind, möge gelten, dass $a_3 < a_2 < a_4$ ist. Dann gilt

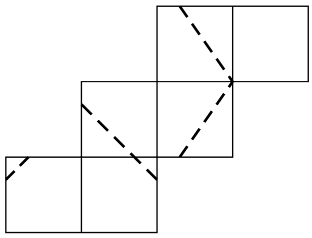
(**A**) $a_3 \cdot a_4 > 0$ (**B**) $a_2 \cdot a_3 < 0$ (**C**) $a_2 \cdot a_4 < 0$ (**D**) $a_2 < 0$ (**E**) $a_2 \cdot a_3 > 0$

20. Welche Ziffer steht bei 11^{2004} an der zweitletzten Stelle?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

5-Punkte-Aufgaben

21. Die Seiten einer beim Schnitt einer Ebene mit einem Würfel entstandenen ebenen Schnittfigur sind mit gestrichelten Linien auf das Würfelnetz gezeichnet, und zwar auf die Seite des Papiers, die nach dem Falten die Außenseite bildet (s. Abb.). Um welche Figur handelt es sich?



(**A**) ein Dreieck, aber nicht rechtwinklig (**B**) ein Sechseck
(**C**) ein rechtwinkliges Dreieck (**D**) ein Fünfeck
(**E**) ein Viereck, jedoch kein Parallelogramm

22. Zwei Zahlen a und b mögen unterschiedliche Vorzeichen haben. Welche der folgenden Zahlen ist die größte?

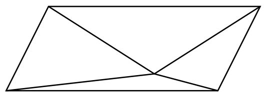
(**A**) $(|a|-|b|)^2$ (**B**) $|a^2-b^2|$ (**C**) $(a+b)^2$ (**D**) $(a-b)^2$ (**E**) a^2+b^2

23. Jemand hat ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge 6 cm und 8 cm aus Papier ausgeschnitten und es dann entlang einer geraden Linie einmal gefaltet. Welcher der folgenden Werte kann der Flächeninhalt des beim Falten entstandenen Vielecks sein?

(**A**) 9 cm^2 (**B**) 12 cm^2 (**C**) 18 cm^2 (**D**) 24 cm^2 (**E**) 32 cm^2

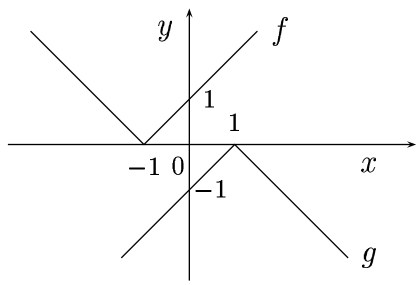
24. Bei Wahlen in Vitaminien hatte jeder, der für die Broccoli-Partei stimmte, Broccoli schon einmal gegessen. 90% der verbleibenden Wähler, die für irgendeine andere Partei stimmten, hatten noch nie Broccoli gegessen. Wie viel Prozent der Wähler gaben der Broccoli-Partei ihre Stimme, wenn genau 46% derjenigen, die sich an der Wahl beteiligten, Broccoli gegessen hatten?

(**A**) 40% (**B**) 41,4% (**C**) 45% (**D**) 46% (**E**) 50,6%



25. Ein Parallelogramm ist in vier Dreiecke zerlegt (s. Zeichnung). „Wenn ich mich richtig erinnere, waren die Maßzahlen für die Flächeninhalte der 4 Dreiecke 4, 5, 8 und 9“, sagt Zoe. „Nein, 5, 6, 7 und 12“, sagt Yusuf. „Irrtum, es waren 10, 11, 12 und 19“, sagt Xaver. „Aber nein, 11, 13, 15 und 16 waren die Flächeninhalte“, sagt Willy. „Ein Blick auf die Zeichnung sagt mir, dass bei keinem von euch die vier Zahlen richtig sind“, sagt Veronika. Wer könnte Recht haben?

(**A**) Zoe (**B**) Yusuf (**C**) Xaver (**D**) Willy (**E**) Veronika



26. Die nebenstehende Zeichnung zeigt die Graphen der Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind. Welche der folgenden Gleichungen ist dann für jede reelle Zahl x erfüllt?

(**A**) $f(x) = -g(x) + 2$ (**B**) $f(x) = -g(x) - 2$
(**C**) $f(x) = -g(x + 2)$ (**D**) $f(x + 2) = -g(x)$
(**E**) $f(x + 1) = -g(x - 1)$

27. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 4. Um A als Mittelpunkt ist ein Kreis geschlagen, der das Dreieck in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt. Der Radius dieses Kreises ist gleich

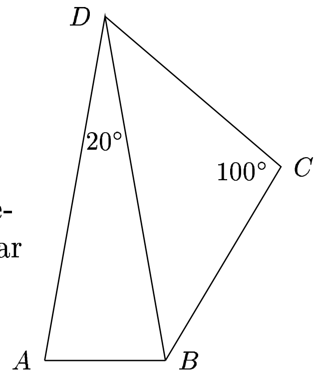
(**A**) $\frac{12\sqrt{3}}{\pi}$ (**B**) $\sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$ (**C**) $\sqrt{\frac{30\sqrt{3}}{\pi}}$ (**D**) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ (**E**) $\frac{48\sqrt{3}}{\pi}$

28. Eine neugierige Laus krabbelt auf einem Stück Kästchenpapier herum, jedes der quadratischen Kästchen ist 1 cm × 1 cm groß. Nachdem die Laus 3 cm weit gelaufen ist, muss sie sich erst einmal ausruhen. Wie viele Kästchen konnte sie bis zur Ruhepause höchstens betreten?

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

29. Als Fred einmal auf Gina warten muss, erinnert er sich, wie sie sich in solchen Fällen die Zeit vertreibt, und übt sich in Rechenkünsten. Als sie kommt, sagt er: „Ich habe mir drei Ziffern a, b, c ausgedacht, für die $0 < a < b < c$ gilt. Dann habe ich damit alle möglichen dreistelligen Zahlen gebildet und diese addiert. Die Summe ist 1554. Nun sag du mir, welchen Wert hat dann c?“

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7



30. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit dem Flächeninhalt 1, in dem AB und BD Grundlinien der gleichschenkligen Dreiecke ABD bzw. DBC sind. Es sei $\sphericalangle ADB = 20°$ und $\sphericalangle DCB = 100°$ (s. Zeichnung). Dann ist $\overline{AC} \cdot \overline{BD} =$

(**A**) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (**B**) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (**C**) $\sqrt{3}$ (**D**) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (**E**) nicht bestimmbar