Klassenstufe 11 bis 13

Donnerstag, 18. März 1999 Arbeitszeit: 75 Minuten

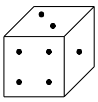
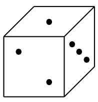
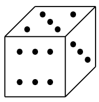
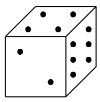
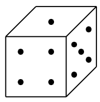
1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen; wenn keine Antwort gegeben wird, gibt es 0 Punkte. Mehr als ein Antwortkreuz zu einer Frage wird als falsche Antwort bewertet.
3. Jeder Teilnehmer bekommt 30 Punkte als Grundpunktzahl zu Beginn. Damit wird eine negative Gesamtpunktzahl verhindert. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150.
4. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. Donald wird zu einem Tisch geführt, auf dem sich amerikanische Banknoten be£nden, und zwar im Wert von 1$, 2$, 5$, 10$, 20$, 50$ und 100$. Er darf sich insgesamt 30 Scheine nehmen, muß dabei allerdings von jeder Sorte mindestens einen Schein nehmen, und von je zwei verschiedenen Sorten muß die Anzahl der Scheine verschieden sein. Er denkt kurz nach und nimmt sich dann die 30 Scheine so, daß er die größtmögliche Geldsumme hat. Wie viele 20$-Scheine hat er genommen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

2. Von den fünf Bildern zeigen genau vier Bilder denselben Spielwürfel in verschiedenen Ansichten. Welches der Bilder zeigt einen anderen Würfel?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

3. Tom hat eine Tafel Schokolade. Er bricht davon für sein Känguru zuerst eine waagerechte Reihe ab, dann zwei senkrechte Reihen und schließlich noch einmal eine waagerechte Reihe. Übrig behält er sechs Stückchen. Welche Antwort auf die Frage, aus wie vielen Stückchen die ganze Tafel bestand, ist die richtige?

(**A**) Es müssen 16 Stückchen gewesen sein. (**B**) Es müssen 20 Stückchen gewesen sein.

(**C**) Es müssen 24 Stückchen gewesen sein. (**D**) Es müssen 28 Stückchen gewesen sein.

(**E**) Es ist nicht genügend Information für eine eindeutige Antwort vorhanden.

4. Wie viele der positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 1000 sind, können als Produkt zweier gerader Zahlen geschrieben werden?

(**A**) 100 (**B**) 150 (**C**) 200 (**D**) 220 (**E**) 249

5. Es sei bekannt, daß die Zahl a mit $a = \sqrt[3]{***9}$ eine ganze Zahl ist. Dann ist a gleich

(**A**) 39 (**B**) 13 (**C**) 29 (**D**) 19 (**E**) 23

6. Gestern morgen war der Wechselkurs in drei verschiedenen Geldwechselstuben derselbe. In der ersten Wechselstube stieg der Kurs bis zum Mittag um 5% und £el danach bis zum Abend um 5%. In der zweiten Wechselstube £el der Kurs bis zum Mittag um 5% und stieg anschließend bis zum Abend um 5%. In der dritten Wechselstube blieb der Kurs über den Tag konstant. In welcher Wechselstube war der Kurs am Ende des Tages am niedrigsten?

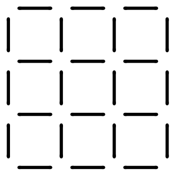
(**A**) in allen drei gleich (**B**) in der ersten (**C**) in der zweiten

(**D**) in der ersten und zweiten (**E**) in der dritten

7. Es ist $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ gleich

(**A**) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ (**B**) $1+\sqrt{2}$ (**C**) $1+2\sqrt{2}$ (**D**) $\sqrt{3}+\sqrt{8}$ (**E**) $\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{2}}$

8. Aus der abgebildeten Streichhölzer-Figur sollen Streichhölzer so entfernt werden, daß genau drei Quadrate übrig bleiben? Welche unter den angegebenen Zahlen ist die kleinste Zahl zu entfernender Hölzer, bei der das möglich ist?

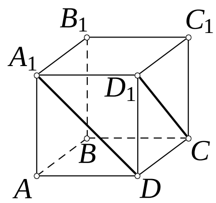


(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 14

9. Unsere Mathematiklehrerin erzählt uns, dass sie bemerkt habe, dass man ihr Alter aus dem Alter ihrer Tochter durch Vertauschen der beiden Ziffern erhalten könne. Wie alt war unsere Mathelehrerin bei der Geburt ihrer Tochter?

(**A**) 24 (**B**) 25 (**C**) 26 (**D**) 27 (**E**) 28

10. Der Winkel zwischen den Diagonalen A_1D und D_1C des Würfels $ABCDA_1B_1C_1D_1$ beträgt



(**A**) 60° (**B**) 80° (**C**) 45°
(**D**) 90° (**E**) 75°

4-Punkte-Aufgaben

11. Die Einerstelle der Zahl $1999^{1998^{1997^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}$ ist

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 7
(**D**) 9 (**E**) eine andere Zahl

12. Für wie viele ganze Zahlen ist der Wert des Bruches $\dfrac{2n^2+9n+13}{n+2}$ eine ganze Zahl?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

13. Die Summe der Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 18 Einheiten. Die Summe der Quadrate der Längen der Seiten beträgt 128 Einheiten. Dann ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks gleich

(**A**) 18 (**B**) 16 (**C**) 12 (**D**) 10 (**E**) 9

14. Es sei

$$a=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{6}}}}}}.$$

Welche der Ungleichungen gilt?

(**A**) $1\le a<2$ (**B**) $2\le a<3$ (**C**) $3\le a<4$ (**D**) $4\le a<5$ (**E**) $5\le a<6$

15. Wie viele Quadrate, deren Seiten auf den Seitenlinien der Schachbrettfelder liegen, kann man auf ein 8×8-Schachbrett zeichnen?

(**A**) 64 (**B**) 65 (**C**) 113 (**D**) 114 (**E**) 204

16. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kannst du, indem du dich nach rechts oder nach unten bewegst, das Wort KÄNGURU lesen?

K Ä N G U R U
Ä N G U R U
N G U R U
G U R U
U R U
R U
U

(A) 164 **(B)** 128 **(C)** 112 **(D)** 84 **(E)** 64

17. Wie viele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung $2^x(6-x) = 8x$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

18. Für welche der angegebenen fünf Zahlen für n erhält man bei Division der Zahl $1999^n - 1998n - 1$ durch die Zahl $1998 \cdot 1999$ eine ganze Zahl?

(A) 1997 **(B)** 1998 **(C)** 1999 **(D)** 2000 **(E)** 2001

19. Auf einem kreisrunden Tisch vom Radius 1 m liegt ein dünnes quadratisches Tischtuch von 2,5 m Seitenlänge so, dass Mitte des Tisches und Mitte des Tischtuchs zusammenfallen. Der überhängende Rand des Tischtuchs hat unterschiedliche Höhen über dem Fußboden. Gesucht ist der größte Höhenunterschied zwischen den Randpunkten der Decke. Er ist

(A) 0,25 m **(B)** 0,5 m **(C)** $\frac{5\sqrt{2}-5}{4}$ m

(D) $(2{,}5\sqrt{2}-1)$ m **(E)** das lässt sich nicht bestimmen

20. Es sei $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ eine nichtnegative Funktion, die die zwei Bedingungen

$$f(1) = 2, \qquad f(x+y) = f(x)f(y).$$

erfüllt. Welchen Wert hat f an der Stelle $\frac{1}{2}$?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **(D)** 1 **(E)** $\sqrt{2}$

5-Punkte-Aufgaben

21. Beim Schulhandballturnier spielte jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere. Für den Gewinn eines Spiels erhielt die Siegermannschaft 2 Punkte, bei Unentschieden erhielten beide Mannschaften je 1 Punkt und für ein verlorenes Spiel gab es 0 Punkte. Am Ende hatte die Siegermannschaft des Turniers 7 Punkte, die zweitbeste Mannschaft 5 und die drittbeste 3 Punkte. Wie viele Punkte bekam die letzte Mannschaft?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** unbestimmt

22. Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $x^2 - [x] = 3$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich x ist?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

23. Es sei f die folgende Funktion

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^4+1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4+1}}$$

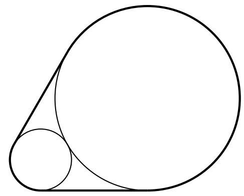
Welchen Wert hat $f\left(1999^{2000}\right)$?

(A) $-\frac{1}{1999^{1000}}$ **(B)** $-\frac{1}{1999^{2000}}$ **(C)** $\frac{1}{1999^{2000}}$ **(D)** $\frac{1}{1999^{1000}}$ **(E)** 0

24. Eine Insel wird zum einen Teil von edelgesinnten Leuten bewohnt, die stets die Wahrheit sagen, zum anderen Teil von solchen Leuten, die stets lügen. Insgesamt wohnen 1999 Menschen auf dieser Insel. Für jeden von ihnen trifft genau eine der folgenden Lieblingsbeschäftigungen zu; entweder singt dieser Mensch gern, oder er surft gern im Internet oder er liest gern Märchen. Jedem Bewohner werden die folgenden 3 Fragen gestellt:
1. Singst du gern? 2. Surfst du gern im Internet? 3. Liest du gern Märchen?
1000 der Bewohner bejahten die erste, 700 die zweite und 500 die dritte Frage. Wie viele Lügner gibt es auf der Insel?

(**A**) 102 (**B**) 180 (**C**) 201 (**D**) 322 (**E**) 729

25. Zwei Kreisscheiben mit den Radien 3 cm und 9 cm seien wie in der Zeichnung angeordnet und mit einem Draht zusammengebunden. Wie lang ist der Draht (eventuelle Überlappungen der beiden Drahtenden bei der Befestigung sollen unberücksichtigt bleiben)?



(**A**) $(10+20\pi)$ cm (**B**) $(12\sqrt{3}+14\pi)$ cm (**C**) $(13\sqrt{3}+12\pi)$ cm
(**D**) $(14\sqrt{3}+11\pi)$ cm (**E**) ein anderes Resultat

26. Die Quadrate der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, beginnend mit 1, werden nacheinander aufgeschrieben in der Form 149162536496481... Welche Ziffer steht an der hundertsten Stelle?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

27. Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$, die folgendermaßen de£niert ist

$$f(n) = \begin{cases} n+5 & , \text{ wenn } n \text{ ungerade ist} \\ \dfrac{n}{2} & , \text{ wenn } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$

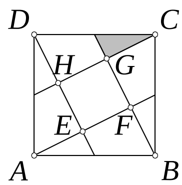
Wie groß ist die Quersumme von k (die Summe der Ziffern der Zahl k), wenn k ungerade und $f(f(f(k))) = 35$ ist?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 15

28. Wie viele verschiedene Teilmengen aus 3 Elementen lassen sich aus einer Menge von 7 voneinander verschiedenen Elementen bilden derart, dass je zwei von diesen Teilmengen in genau einem Element übereinstimmen?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

29. Der Flächeninhalt eines Quadrates $ABCD$ beträgt 5 cm^2. Die eingezeichneten vier Punkte E, F, G und H sind die Eckpunkte eines Quadrates mit dem Flächeninhalt 1 cm^2. Wie groß ist dann der Flächeninhalt des grauen Dreiecks (in cm^2)?



(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) 1

30. Die Abstände eines Punktes P, der innerhalb des Quadrates $ABCD$ liegen soll, zu den Eckpunkten A, B und C beträgt $\overline{PA} = 2$ cm, $\overline{PB} = 7$ cm und $\overline{PC} = 9$ cm. Dann beträgt der Abstand $\overline{PD}$ (in cm)

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9