Klassenstufen 11 bis 13

Donnerstag, 10. April 2008 Arbeitszeit: 75 Minuten

1. Von den jeweils 5 Antworten ist genau eine richtig.
2. Jeder Teilnehmer bekommt zu Beginn 30 Punkte. Bei einer richtigen Antwort werden die dafür vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzu addiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Ist die Antwort falsch, werden 3/4, 4/4 oder 5/4 Punkte abgezogen. Die höchste zu erreichende Punktzahl ist 150, die niedrigste 0.
3. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

3-Punkte-Aufgaben

1. Wenn $x + y = 0$ und $x \neq 0$, dann ist $\frac{y^{2008}}{x^{2008}} =$

(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 2^{2008} (**E**) $\frac{x}{y}$

2. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 45. Dann ist genau eine dieser beiden Zahlen ganz gewiss kleiner als

(**A**) 5 (**B**) 18 (**C**) 22 (**D**) 23 (**E**) 25

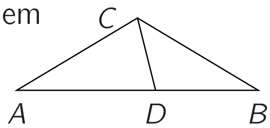
3. Wie viele Primzahlen p gibt es, für die gilt, dass auch $p^4 + 1$ eine Primzahl ist?
(*Zur Erinnerung: 1 ist keine Primzahl.*)

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) fünf (**E**) unendlich viele

4. Es ist $36^2 + 48^2 =$

(**A**) $4^2 \cdot 21^2$ (**B**) $12^2 \cdot 7$ (**C**) $12^2 \cdot 5^2$ (**D**) $12^2 \cdot 7^2$ (**E**) $(36 + 48)^2$

5. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und einem Punkt D auf der Seite $\overline{AB}$, derart, dass $\overline{AD} = \overline{AC}$ und $\overline{DB} = \overline{DC}$ (s. Abb.). Dann ist $\measuredangle BCA =$



(**A**) 98° (**B**) 100° (**C**) 104° (**D**) 108° (**E**) 110°

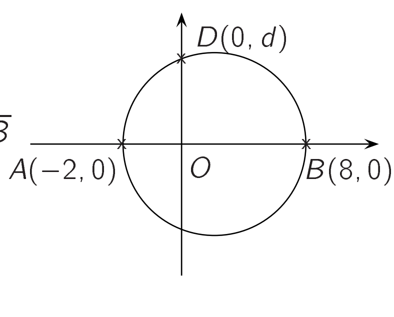
6. Jedes der 36 Kinder im Kindergarten meines Bruders hat ein Känguru gezeichnet. Gelbe, schwarze und braune Buntstifte standen zur Auswahl, aber nur 5 Kinder haben alle drei Farben benutzt. Als ich die Zeichnungen angucke, stelle ich fest, dass auf 25 von ihnen Gelb, auf 28 Braun und auf 20 Schwarz auftaucht. Dann krieg ich raus, wie viele einfarbige Kängurus dabei sind, sagt meine Mutter. Es sind

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

7. Der maximale Wert, den $f(x) = |5 \sin x - 3|$ für $x \in \mathbb{R}$ annehmen kann, ist

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) π (**D**) 5π (**E**) 8

8. Die Zeichnung zeigt einen Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ und dem Punkt D auf der Kreislinie. Dann ist $d =$



(**A**) 3 (**B**) $2\sqrt{3}$ (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

9. Die fünf voneinander verschiedenen Punkte $A_1, \ldots, A_5$ liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, wobei die Abstände der Punkte voneinander unterschiedlich sein können. Auf derselben Geraden soll ein Punkt P markiert werden, für den die Summe der Abstände der fünf Punkte zu P, also $\overline{A_1P} + \overline{A_2P} + \overline{A_3P} + \overline{A_4P} + \overline{A_5P}$ minimal ist. Dann ist P

(**A**) identisch mit A_2 (**B**) identisch mit A_3
(**C**) identisch mit A_4 (**D**) irgendein Punkt zwischen A_2 und A_4
(**E**) irgendein Punkt zwischen A_1 und A_5

10. Nora möchte in die beiden Leerstellen von 2__8 zwei Ziffern schreiben und dabei eine Zahl erhalten, die durch 3 teilbar ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 19 (**D**) 20 (**E**) 33

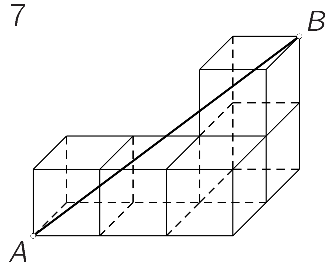
4-Punkte-Aufgaben

11. Gegeben sind die sieben Zahlen $-9; 0; -5; 5; -4; -1; -3$. Ich bilde aus sechs dieser Zahlen Paare, so dass die drei Summen, die ich aus den beiden Zahlen eines jeden Paares bilden kann, gleich sind. Welche Zahl bleibt übrig?

(**A**) 5 (**B**) 0 (**C**) -3 (**D**) -4 (**E**) -5

12. Bei der Mathematikolympiade sind bei uns in der Regionalrunde fünf unterschiedlich schwere Aufgaben gestellt worden. Sie wurden mit fünf unterschiedlichen Punktzahlen bewertet. Als ich meine Schwester nach ihrem Abschneiden frage, sagt sie mir, dass sie sowohl die beiden mit den höchsten als auch die beiden mit den niedrigsten Punktzahlen bewerteten Aufgaben vollständig gelöst und dafür 10 bzw. 18 Punkte erhalten hat. Wie viele Punkte gab es für die Aufgabe mit mittlerer Bewertung?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7
(**D**) 8 (**E**) 9



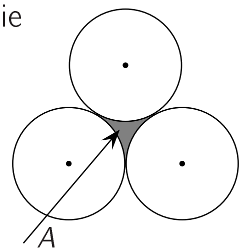
13. Die fünf Würfel in der Zeichnung haben je die Kantenlänge 1. Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$?

(**A**) $\sqrt{17}$ (**B**) 7 (**C**) $\sqrt{13}$ (**D**) $\sqrt{7}$ (**E**) $\sqrt{14}$

14. Zähler und Nenner eines Bruches b sind beides negative Zahlen, der Zähler ist um 1 größer als der Nenner. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?

(**A**) $b < -1$ (**B**) $-1 < b < 0$ (**C**) $0 < b < 1$
(**D**) $b > 1$ (**E**) b kann sowohl positiv als auch negativ sein

15. Drei Kreise, die jeder den Radius r haben, berühren einander, wie es die nebenstehende Zeichnung zeigt. Welchen Flächeninhalt hat A?



(**A**) $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right) r^2$ (**B**) $\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) r^2$ (**C**) $\frac{1}{8}\pi r^2$
(**D**) $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) \pi r^2$ (**E**) $\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) r^2$

16. Wenn die fünf Zahlen 24, a, b, c, 80 aufeinanderfolgende Elemente einer arithmetischen Folge sind, so ist $a + b + c =$

(**A**) 52 (**B**) 104 (**C**) 156 (**D**) 208 (**E**) 260

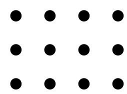
17. Eine Anzahl Geraden seien so in die Ebene gezeichnet, dass sich an den Schnittpunkten dieser Geraden alle folgenden Winkel finden lassen: $10°$, $20°$, $30°$, $40°$, $50°$, $60°$, $70°$, $80°$, $90°$. Wie viele Geraden mussten dazu mindestens gezeichnet werden?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

18. Angenommen, es gilt $x^2yz^3 = 7^3$ und außerdem $xy^2 = 7^9$. Dann ist $xyz =$

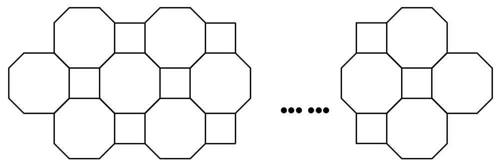
(**A**) 7^{10} (**B**) 7^9 (**C**) 7^8 (**D**) 7^6 (**E**) 7^4

19. Aus den zwölf Punkten des abgebildeten Gitters werden zufällig drei ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen?



(**A**) $\frac{1}{12}$ (**B**) $\frac{1}{11}$ (**C**) $\frac{1}{10}$ (**D**) $\frac{1}{16}$ (**E**) $\frac{1}{20}$

20. Auf dem Weg zum Badmintontraining laufe ich jedes Mal an einem imposanten, aus lauter gleichlangen Vierkanteisenstäben geschmiedeten Zaun (s. Zeichnung) vorbei. Genau 61 Achtecke habe ich gezählt. Die Anzahl der Vierkantstäbe des Zauns beträgt dann



(**A**) 328 (**B**) 400 (**C**) 416 (**D**) 446 (**E**) 488

5-Punkte-Aufgaben

21. In der nebenstehenden Multiplikationsaufgabe sind die Sternchen durch Ziffern zu ersetzen, so dass die Aufgabe korrekt ist. Dann ist die Summe der Ziffern des Produktes gleich

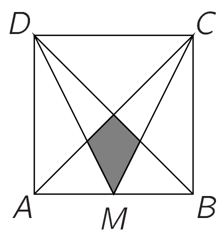
$$
\begin{array}{r}
\ast\ \ast\ \ast\ \cdot\ 1\ \ast\ \ast \\
\hline
\ast\ \ast\ 2 \\
9\ 0\ \ast \\
2\ 2\ \ast\ \ast \\
\hline
5\ 6\ \ast\ \ast\ \ast
\end{array}
$$

(**A**) 16 (**B**) 20 (**C**) 26 (**D**) 30 (**E**) 27

22. Es sei bekannt, dass für die drei reellen Zahlen x, y, z die Gleichungen $x + y + z = 1$ und $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ gelten. Dann ist $x^2 + y^2 + z^2$ gleich

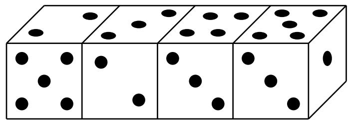
(**A**) 0 (**B**) $3\sqrt{2}$ (**C**) 1 (**D**) $3\sqrt{3}$ (**E**) 2

23. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 1. Mit M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ bezeichnet. Der Flächeninhalt der grau gezeichneten Fläche ist dann



(**A**) $\frac{1}{24}$ (**B**) $\frac{1}{16}$ (**C**) $\frac{2}{15}$ (**D**) $\frac{2}{25}$ (**E**) $\frac{1}{12}$

24. Die vier abgebildeten Würfel sind zwar keine Spielwürfel, was bedeutet, dass die Summe der Punkte auf einander gegenüberliegenden Flächen *nicht* 7 sein muss, aber sie sind untereinander identisch. Dann ist die Summe der Punkte auf den 6 Würfelseiten, in denen je zwei der Würfel einander berühren, gleich

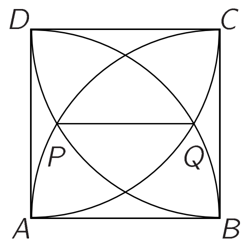


(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 22 (**D**) 24 (**E**) 25

25. Wie viele 4-stellige Zahlen haben die Eigenschaft, dass die Ziffer, die an der Tausenderstelle steht, größer ist als jede der drei anderen Ziffern?

(**A**) 2025 (**B**) 285 (**C**) 3024 (**D**) 504 (**E**) 2970

26. Es ist $ABCD$ ein Quadrat der Seitenlänge 1. Um A, B, C bzw. D werden Viertelkreise mit dem Radius 1 gezeichnet, wobei als Schnittpunkte P und Q entstehen (s. Zeichnung). Wie lang ist $\overline{PQ}$?



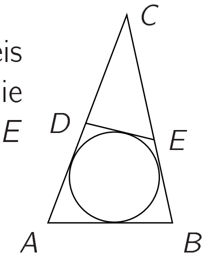
(**A**) $2-\sqrt{2}$ (**B**) $\frac{3}{4}$ (**C**) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

(**D**) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (**E**) $\sqrt{3}-1$

27. Judith aus Goslar geht in diesem Jahr in Lausanne in der Schweiz zur Schule. Dort ist die 6 die beste Zensur. Nach dem ersten Viertel des Schuljahres ist Judiths Notendurchschnitt in Mathematik 5,0. Sie verspricht ihren Eltern, sich bis zum Schuljahresende zu verbessern und schafft auch wirklich in den nächsten drei Tests je eine 6. Ihr Durchschnitt ist nun exakt 5,3. Judith will einen Durchschnitt von 5,6 erreichen, indem sie bei den verbleibenden Tests jeweils eine 6 schreibt. Dann beträgt die Anzahl der noch nötigen Sechsen

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 11

28. In das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 5$ und $\overline{CA} = 6$ sei ein Kreis einbeschrieben (s. Abb., Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht). Ferner sei die Strecke $\overline{DE}$ Tangente an den Kreis. Dann ist der Umfang des Dreiecks CDE gleich



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

29. Das erste Element einer Folge ist $a_1 = 0$. Für $n \geq 1$ ist $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$. Ist nun $a_k = 2008$, so ist $k =$

(**A**) 2008 (**B**) 2009 (**C**) 4017 (**D**) 4018 (**E**) 4019

30. Es sei M das Produkt aus dem Umfang des Dreiecks und der Summe der drei Höhen dieses Dreiecks. Vorausgesetzt, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks 1 ist, dann ist von den folgenden Aussagen *genau eine* falsch. Welche?

(**A**) M kann größer als 100 sein (**B**) es ist stets $M > 6$

(**C**) M kann gleich 18 sein (**D**) M kann kleiner als 12 sein

(**E**) wenn das Dreieck rechtwinklig ist, so ist $M > 16$